СМБ – Секция"ИЗТОК"

ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 24.04.2010

10 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент : Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор . "Друг отговор" се приема за решение само при отбелязан верен резултат . 15 тестови задачи са разделени на групи по трудности : от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки ; от 6 до 10- с по 5 точки и от 11 до 15 – с по 7 точки.

Организаторите Ви пожелават успех !

Име……………………………………………………..училище………………..град…………...

1 зад. Броят на пресечните точки на графиките на $f(x) = x^2 + 3x - 5$ и $g(x) = 2x^2 + 9x + 4$ е:

а) 1; б) 2; в) 0; г) друг отговор

2 зад. Стойността на $\log_2 8 + 3\log_{2010} 1 - 4\lg\sqrt{10}$ е:

а) − 1; б) 0; в) 3; г) друг отговор

3 зад. Ако $tg\alpha = \frac{3}{2}$, то стойността на $\frac{7\sin\alpha - 5\cos\alpha}{2\sin\alpha + \cos\alpha}$ е:

а) $-\frac{1}{7}$; б) $\frac{11}{8}$; в) $\frac{\sqrt{13}}{5}$; г) друг отговор

4 зад. Сборът от лицата на две подобни фигури е 40. Ако коефициентът на подобие е 3, то по-малкото лице е :

а) 10; б) 4; в) 15; г) друг отговор

5 зад. В правоъгълен триъгълник с лице 45 височината към хипотенузата я дели в отношение 1:9. Хипотенузата на триъгълника е :

а) 10; б) $9\sqrt{3}$; в) $10\sqrt{3}$; г) друг отговор

6 зад. Решенията на неравенството $\frac{(x^2+4)(x-3)}{x(x-1)} \le 0$ са:

а) $x \in (-\infty;0] \cup [1;3]$; б) $x \in (-\infty;-2) \cup (0;1) \cup (2;3)$;

в) $x \in (-\infty;-2] \cup (0;1) \cup [2;3]$; г) друг отговор

7 зад. Ако $2^a = x$ и $3^{2a} = y$, то 72^a е равно на:

а) $3x + y$; б) $3xy$; в) $x^3 y$; г) друг отговор

8 зад. В равнобедрен триъгълник височината към основата е 8, а радиусът на вписаната окръжност е 2. Бедрото на триъгълника е:

а) $2\sqrt{2}$; б) $3\sqrt{2}$; в) не може да се определи; г) друг отговор

9 зад. Правоъгълник има периметър 12, всяка от страните е увеличена с едно и също число m и лицето се увеличило с 16. Стойността на m е:

а) 2; б) 4; в) 8; г) друг отговор

10 зад. Ако $\log_2 5 = k$, то $\log_2 20$ е равно на:

а) $2k$; б) $4k$; в) $2 + k$; г) друг отговор

11 зад. $ABCD$ е трапец. Основите се отнасят , както $AB:CD = 3:2$. Диагоналите се пресичат в точка O. Ако лицето $S_{DOC} = 16$, то лицето на трапеца е

а) 50; б) 88; в) 150; г) друг отговор

12 зад. В правоъгълен триъгълник радиусите на вписаната и описаната окръжност са 1 и 5. Лицето на триъгълника е:

а) 11; б) $5 + \sqrt{14}$; в) $5 - \sqrt{14}$; г) друг отговор

13 зад. Нека M е най-малкото естествено число, сборът от цифрите на което е 2010. Първата цифра на числото M е :

а) 9; б) 3; в) не може да се определи; г) друг отговор

14 зад. Нека $2^x = -a^2 + 2a + 3$. Сборът от целите стойности на a, за които изразът има смисъл е :

а) 5; б) 3 в) не може да се определи; г) друг отговор

15 зад. Върху масата са поставени картончета, на които са написани различни естествени числа. Всяко картонче може да групираме с едно или няколко от останалите така, че произведението от числата върху тях да е 2010, Какъв е максималния брой на всички картончета.

а) 16; б) 14; в) 2010; г) друг отговор

Отговори 10 клас.

1 - А; **2-**Г 1; **3 –** Б; **4 –** Б; **5 –** В; **6 –** Г $x \in (-\infty;0) \cup (1;3]$ **7 –** В; **8 –** Г $6\sqrt{2}$
9 – А; **10 –** В; **11 –** Г 100; **12 –** А; **13 –** Б; **14 –** Б; **15 –** А.

Кратки упътвания:

1. **зад.** Абсцисата на пресечната точка на двете графики е корен на уравнението $f(x) = g(x)$, което има единствен корен x = - 3 , точката е с координата (- 3, - 5).
2. **зад.** $\log_2 8 = 3$, $\log_{2010} 1 = 0$, $\lg\sqrt{10} = 0{,}5$.
3. **зад.** От определението на $tg\alpha$ заместваме $\sin\alpha = 3k, \cos\alpha = 2k, k \neq 0$.
4. **зад**. Нека $S_1 < S_2 \Rightarrow S_1 : S_2 = 1 : k^2 = 1:9 \Rightarrow S_2 = 9\, S_1$.
5. **зад.** Нека частите са x и $9x$, от метричните зависимости в правоъгълен триъгълник $\Rightarrow$ $h^2 = a_1.b_1 \Rightarrow\ h^2 = x.9x = 9x^2 \Rightarrow h = 3x$, където h е височината към хипотенузата. Тогава $S = \frac{c.h}{2} = \frac{3x.10x}{2} = 15x^2 = 45 \Rightarrow x = \sqrt{3}$,а хипотенузата е $10x$.
6. **зад.** От метода на интервалите трябва да се съобрази, че $x \neq 0, x \neq 3$, а $x^2 + 4 > 0$.
7. **зад.** $72^a = 8^a.9^a = \left(2^a\right)^3.3^{2a}$.
8. **зад**. Нека $\Delta\, ABC$ ($AC = BC$), CH е височина, O център на вписаната окръжност $\Rightarrow$ OH = 2, HC = 6. От свойството на ъглополовящата (AO) за $\Delta AHC \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{OH}{OC} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1} \Rightarrow AH = x$, а $AC = 3x$, от теоремата на Питагор за AHC $AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow x^2 + 64 = 9x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$. Следователно бедрото е $3x = 6\sqrt{2}$.
9. **зад.** Нека страните на началния правоъгълник са x и y, от периметъра $\Rightarrow$ $x + y = 6$. Тогава от връзката между лицата на двата правоъгълника получаваме, че $xy = (x+m)(y+m) - 16$ $\Leftrightarrow xy = (x+m)(y+m) - 16 \Leftrightarrow xy = xy + m(x+y) + m^2 - 16 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 16 = 0$ с корени 2 и -8.
10. **зад.** От $\log_2 5 = k \Rightarrow 5 = 2^k$, тогава $\log_2 20 = \log_2 4.5 = \log_2 2^2 2^k = \log_2 2^{2+k} = 2 + k$.
11. **зад.** $\Delta ABO \sim \Delta COD \Rightarrow S_{ABO} : S_{COD} = 9:4 \Rightarrow S_{ABO} = 36$. $\Delta\, AOD$ и $\Delta\, COD$ имат обща височина от точка $D \Rightarrow S_{AOD} : S_{DOC} = AO : OC = AB : CD = 3:2 \Rightarrow S_{AOD} = 24$. Аналогично $S_{BOC} = 24$.
12. **зад**. При стандартни означения $c = 2R = 10$, $r = p - c \Rightarrow p = r + c = 11$, $S = p.r = 11$.
13. **зад.** За да бъде най-малко числото, трябва да е с възможно най-малко цифри, т.е. да има максимален брой цифра 9. 2010:9= 223 и остатък 3. За да бъде най-малко числото, то трябва да започва с 3 и още 223 деветки.
14. **зад.** За да има смисъл $2^x = -a^2 + 2a + 3 > 0$. Решенията на неравенството са $a \in (-1;3)$, целите стойности на a са 0, 1 и 2.
15. **зад.** Очевидно върху картончетата са написани само делители на 2010. Максималният брой е ако са записани всички делители, включително 1 и 2010. 2010 = 2.3.5.67. Всички делители са 1, 2, 3, 5, 6,10,15, 30, 67, 134, 201, 335, 402, 670, 1005 и 2010. Общо 16.

Стефчо Наков
Монтана