

Секция “Изток” – СМБ
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 09.12.2017 г.

10 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. “Друг отговор” се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име.....училище.....град.....

1. Броят на различните реални корени на уравнението $x^4 - 3x^2 = 0$ е равен на:
А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3
2. Коя от посочените стойности на m **не е** от допустимите стойности на израза $\frac{m^2 - 4}{m^2 + 25} : \frac{m^3 - 27}{m^2 - 4m}$:
А) -5 Б) -2 В) 2 Г) 3
3. В равностранен триъгълник височината е равна на $\sqrt{3}$. Страната на триъгълника е равна на:
А) 1 Б) 2 В) $3\sqrt{3}$ Г) друг отговор
4. Върхът на параболата на квадратната функция $f(x)$ е с абсциса $x_0 = 3$. Ако един от корените на уравнението $f(x) = 0$ е равен на 7, то другият корен е равен на:
А) 4 Б) 5 В) 10 Г) друг отговор
5. Ако за острия ъгъл β е дадено, че $\cos \beta = \frac{1}{3}$, то е вярно, че:
А) $\beta \in (60^\circ, 90^\circ)$ Б) $\beta \in (45^\circ, 60^\circ)$ В) $\beta \in (30^\circ, 45^\circ)$ Г) $\beta \in (0^\circ, 30^\circ)$
6. В правоъгълна координатна система са построени графиките на функциите $f(x) = x^2 - 3x + 1$ и $g(x) = x^2 + 3x + 7$. Броят на пресечните точки на двете графики е:
А) 0 Б) 1 В) 2 Г) друг отговор
7. Решенията на неравенството $\frac{x^2(x^2 + x - 12)}{(x^2 + 25)(-x^2 - x - 1)} > 0$ са стойностите на x , за които:
А) $x \in (-4, 3)$ Б) $x \in (-\infty, -4) \cup (0, 3)$ В) $x \in (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$ Г) друг отговор
8. Графиките на функциите $f(x) = x^2 + 4x + k$ и $g(x) = 2x + 1$ се допират в точка T . Координатите на точка T са:
А) $(-1, -1)$ Б) $(2, 5)$ В) $(1, 3)$ Г) друг отговор
9. Обиколката на равнобедрен $\triangle ABC$ е 72 cm. Вписаната в триъгълника окръжност пресича височината към основата CH ($H \in AB$) в точка $K \neq H$. Ако $CK:KH = 4:5$, то радиусът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е равен на:
А) $\frac{4}{3}$ cm Б) 4cm В) $\frac{20}{3}$ cm Г) друг отговор
10. Дадена е функцията $f(x) = x^2 - 2kx + k - 7$.
А) Решете неравенството $f(x) \geq 0$ при $k = 2$.
Б) Докажете, че уравнението $f(x) = 0$ има два различни реални корени x_1 и x_2 за всяка реална стойност на числото k .
В) Намерете най-малката стойност на функцията $g(k) = x_1^2 + x_2^2$.

Отговори 10 клас

1.Г); 2.Г); 3.Б); 4.Г (-1); 5.А); 6.Б); 7.Г) $x \in (-4,0) \cup (0,3)$ 8.А); 9.В)

Решени 10 зад.:

А) (4 точки)

$$x^2 - 4x - 5 \geq 0$$

корените са -1 и 5

решенията на неравенството са $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$

1 точка

1 точка

2 точки

Б) (4 точки)

$$D = 4k^2 - 4k + 28$$

Новата дискриминанта е $D_1 = -432 < 0$

Коефициента пред k^2 е положителен $\Rightarrow D > 0$ за всяко k , следователно $f(x) = 0$ има два различни реални корени x_1 и x_2 за всяка стойност на k .

1 точка

1 точка

2 точки

В) (7 точки)

От формулите на Виет
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k \\ x_1 x_2 = k - 7 \end{cases}$$

2 точки

$$g(k) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4k^2 - 2k + 14$$

2 точки

Най-малката стойност на $g(k)$ се достига при върха на параболата

$$\text{за } k_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$$

2 точки

Най-малката стойност на $g(k)$ е равна на $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{55}{4}$

1 точка

Стефчо Наков
Монтана
nakoff@abv.bg