СМБ – Секция “Изток”

Великденско математическо състезание 26.04.2009г.

10 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор. “Друг отговор“ се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки, от 6 до 10 с по 5 точки и от 11 до 15 с по 7 точки..

Организаторите Ви пожелават успех !

Име..училище.............................………. ……град...........

1 зад. Стойността на израза $\dfrac{1^{-1}+2^{-2}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}+5(-4)^{-1}+(0,5)^{-2}}$ е:

а) $\dfrac{1}{4}$ б) $\dfrac{1}{6}$ в) $-\dfrac{1}{10}$ г) друг отговор

2 зад. Частното на $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$ е :

а) $\sqrt{2}$ б) $\sqrt[3]{2}$ в) $\sqrt[6]{2}$ г) друг отговор .

3 зад. Стойността на израза $\dfrac{\cos(180^o+\alpha)tg(90^o+\alpha)}{\sin(90^o-\alpha)\cot g(180^o-\alpha)}$ е :

а) 1 б) -1 в) $tg\alpha$ г) друг отговор

4 зад. В ΔABC $\alpha:\beta:\gamma=1:3:8$. Ако AB = 10 см , страната AC е :

а) $\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$ б) $10\sqrt{2}$ в) $5\sqrt{2}$ г) друг отговор.

5 зад. Ако страните на триъгълник са 5, 16 и 19, то триъгълникът е :

а) правоъгълен б) тъпоъгълен в) остроъгълен г) друг отговор

6 зад. Дадени са числата $a=\log_5 3$, $b=\log_2 0,7$, $c=\log_6 11$. Кое неравенство е вярно :

а) a<b<c б) b<c<a в) b<a<c г) друг отговор

7 зад. Решенията на неравенството $\dfrac{(x^2-8x+16)(1-x)}{(x+5)(x-3)}\geq 0$ са:

а) $(-5,1]\cup(3,+\infty)$ б) $(-\infty,-5]\cup[1,3]$ в) $(-\infty,5)\cup[1,3)$ г) друг отговор.

8 зад. Катетите на правоъгълен ΔABC ($\angle C=90^0$) са 3 см и 4 см. CH и CL (H, $L\in AB$) са съответно височина и ъглополовяща през върха C. Дължината на отсечката HL е :

а) $\dfrac{37}{35}$ б) 2 в) $\dfrac{12}{35}$ г) друг отговор

9 зад. Стойността на израза $3\sin 15^o\sin 75^o-\dfrac{\sin 60^o}{\sin^2 15^o-\cos^2 165^o}$ е:

а) $-\dfrac{1}{4}$ б) $\dfrac{7}{4}$ в) $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{4}$ г) друг отговор.

10 зад. Ако $18x^2y$ и $10xy$ са точни квадрати, където x и y са естествени числа, то най-малката възможна стойност на x+y е :

а) 16 б) 36 в) 34 г) друг отговор.

11 зад. Стойността на $\left(49^{\log_7 5}+8^{\log_2\sqrt{3}}\right)\left(5.\log_{\sqrt[3]{3}}3\sqrt[3]{9}-3^{\log_4 8}\right)$ е :

а) 598 б) $45\sqrt{3}-2$ в) $382-200\sqrt{3}$ г) друг отговор.

12 зад. Корените на уравнението $\sqrt{5-x}\left(3^{x^2-7,2x+3,9}-9\sqrt{3}\right)=0$ са :

а) $\dfrac{1}{5}$ б) $\dfrac{1}{5}$, 5, 7 в) $\dfrac{1}{5}$, 5 г) друг отговор.

13 зад. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $(a-1)3^{2x}-(2a-1)3^x-1=0$ има два различни реални корена :

а) $(1,+\infty)$ б) $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в) $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ г) друг отговор.

14 зад. Точката I е център на вписаната в ΔABC окръжност. Ако AI=15, $BI=5\sqrt{7}$, AB=25, то AC и BC са съответно:

а) 16, 21 б) 23, 36 в) 23, 21 г) друг отговор

15 зад. Даден е равнобедрен трапец с основи 16 и 4, в който може да се впише окръжност. Радиусът на описаната около трапеца окръжност е :

а) $\dfrac{5\sqrt{41}}{2}$ б) $2\sqrt{41}$ в) 4 г) друг отговор.

10 клас

1а); 2в); 3б); 4а); 5б); 6в); 7г) $(-\infty,-5)\cup[1,3)\cup\{4\}$; 8в); 9б); 10г) 7; 11а); 12в); 13б); 14в); 15г) $\frac{5\sqrt{41}}{4}$

ОТГОВОРИ:

Решения:

1 зад.

$$\frac{1^{-1}+2^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+5(-4)^{-1}+(0,5)^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}-\frac{5}{4}+4}=\frac{\frac{5}{4}}{5}=\frac{1}{4}$$

2 зад

$$\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}:\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{\frac{2^3}{2^2}}=\sqrt[6]{2}$$

3 зад.

$$\frac{\cos\left(180^o+\alpha\right)tg\left(90^o+\alpha\right)}{\sin\left(90^o-\alpha\right)\cot g\left(180^o-\alpha\right)}=\frac{-\cos\alpha\left(-\cot g\alpha\right)}{\cos\alpha\left(-\cot g\alpha\right)}=-1$$

4 зад.

$\alpha:\beta:\gamma=1:3:8.\quad \alpha=k,\ \beta=3k,\ \gamma=8k$

$k+3k+8k=180^o$ $\quad k=15^o$ $\quad \alpha=15^o, \beta=45^o, \gamma=120^o$

$$\frac{10}{\sin 120^o}=\frac{AC}{\sin 45^o}$$

$$\frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$AC=\frac{10\sqrt{6}}{3}$$

5 зад.

$5^2+16^2=25+256=281<19^2=321$

6 зад.

$a=\log_5 3$, $b=\log_2 0,7$, $c=\log_6 11$.

$0<\log_5 3<1 \quad \log_2 0,7<0 \quad \log_6 11>1$

$b<a<c$

7 зад.

$$\frac{\left(x^2-8x+16\right)(1-x)}{(x+5)(x-3)}\geq 0$$

$$\frac{(x-4)^2(x-1)}{(x+5)(x-3)}\leq 0$$

$(-\infty,-5)\cup[1,3)\cup\{4\}$

8 зад.

AB=5, AL=$\frac{15}{7}$, BL=$\frac{20}{7}$, AH=$\frac{9}{5}$, HL= AL-AH=$\frac{15}{7}-\frac{9}{5}=\frac{75-63}{35}=\frac{12}{35}$

9 зад.

$$3\sin 15^o\sin 75^o-\frac{\sin 60^o}{\sin^2 15^o-\cos^2 165^o}=\frac{3}{2}2\sin 15^o\cos 15^o+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos^2 15^o-\sin^2 15^o}=\frac{3}{2}\sin 30^o+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos 30^o}=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{1}{2}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$$

10 зад.

Щом $18x^2y$ е точен квадрат следва, че 2y е точен корен. Н.м y=2. Тогава 10x2 е точен квадрат за н.м x=5. Следователно x+y =7

11 зад.

$$\left(49^{\log_7 5}+8^{\log_2\sqrt{3}}\right)\left(5.\log_{\sqrt[3]{3}}3\sqrt[3]{9}-3^{\log_4 8}\right)=\left(7^{2\log_7 5}+2^{3\log_2\sqrt{3}}\right)\left(5.3.\frac{5}{3}\log_3 3-3^{\frac{3}{2}\log_2 2}\right)=$$

$$=\left(25+\sqrt{3}^3\right)\left(25-\sqrt{3}^3\right)=625-27=598$$

12 зад.

$$\sqrt{5-x}\left(3^{x^2-7,2x+3,9}-9\sqrt{3}\right)=0$$

ДМ x≤5

$$\left(3^{x^2-7,2x+3,9}-9\sqrt{3}\right)=0$$

$$3^{x^2-7,2x+3,9}=3^{\frac{5}{2}}$$

$$x^2-7,2x+3,9=2,5$$

x =5 или $10x^2-72x+14=0$

$$5x^2-36x+7=0$$

$$D=324-35=289$$

$$x_1=\frac{1}{5}, x_2=7\notin DM$$

Зад.13

Полагаме 3^x= u и пол. $(a-1)u^2-(2a-1)u-1=0$. Това уравн. трябва да има 2 полож. корена**,** т.е. да се реши

системата $\begin{cases} a-1\neq 0 \\ D>0 \\ u_1+u_2>0 \\ u_1u_2>0 \end{cases}$

Зад 14.

От косинусова теорема за ΔABI $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{9}{10}$ откъдето $\cos\alpha=\frac{31}{50}$. Ако доп.т на вп окр до AB, BC, AC са съответно M, N, P, намираме AM=AP=$\frac{27}{2}$, BM=BN=$\frac{23}{2}$(от правоъгълни триъгълници AMI и BMI). Озн. CP=CN=x , прилагаме кос.т. за ΔABC и намираме x=$\frac{19}{2}$. Тогава AC=23, BC=21

Зад.15

От описан четр. следва АД=ВС=10. Ако CM е височина, от ∨BMC се намира MB = 6 и CM=8 $\sin\beta=\frac{4}{5}$ и от ∨AMC – AM=10, AC=$2\sqrt{41}$. Прилагаме синусова теорема за ∨ABC и намираме

$$\frac{AC}{\sin\beta}=2R$$

$$R=\frac{2AC}{\sin\beta}=\frac{5\sqrt{41}}{4}$$

Ани Кюркчиева, Кюстендил