

Времето за решаване е 120 минути.

Организаторите Ви пожелават успех !

Име.....училище.....град.....

### ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор” се приема за решение само, ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

- 1.** Ако  $x_1$  и  $x_2$  са корени на уравнението  $x^2 - 5x - 1 = 0$ , то стойността на израза  $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  е равна на:  
 а)  $\frac{5 - \sqrt{29}}{5 + \sqrt{29}}$                       б)  $2\sqrt{29}$                       в) 5                      г) друг отговор
- 2.** Сборът на две ненулеви числа е равен на тяхното произведение. Ако едното число е два пъти по-голямо от другото, то произведението на двете числа е:  
 а) 1,5                      б) 4,5                      в) 9                      г) друг отговор
- 3.** Дадена е петчленна аритметична прогресия  $\div 2; a; b; c; 14$ . Сборът  $a + b + c$  е равен на:  
 а) 8                      б) 16                      в) 24                      г) друг отговор
- 4.** Числата  $\sqrt{2}$ ,  $2^{x+2}$  и  $2\sqrt{2}$  в този ред са последователни членове на геометрична прогресия. Стойността на  $x$  е равна на:  
 а) -1                      б) -0,5                      в) 0,5                      г) друг отговор
- 5.** В кутия има 5 бели и 3 сини топки. Броят на начините, по които случайно можем да извадим 3 бели и 2 сини топки е равен на:  
 а)  $C_8^3 \cdot C_8^2$                       б)  $V_5^3 \cdot V_3^2$                       в)  $C_5^3 \cdot C_3^2$                       г) друг отговор
- 6.** В  $\triangle ABC$  е изпълнено  $\square ACB = \square ABC + \square BAC$ . Окръжност с диаметър  $AC$  пресича  $AB$  в точка  $M$  така, че  $BC = 2CM$  и  $AM = 5$  cm. Страната  $AB$  е равна на:  
 а) 20 cm                      б) 15 cm                      в) 10 cm                      г) друг отговор
- 7.** Ако  $\lg 5 = k$ , то стойността на  $\lg 20$  е равна на:  
 а)  $4k$                       б)  $4 + k$                       в)  $2 - k$                       г) друг отговор
- 8.** Основите на правоъгълен трапец са 20 cm и 25 cm, а по-малкият му диагонал е  $4\sqrt{34}$ . По-голямото бедро на трапеца е равно на:  
 а) 7 cm                      б) 10 cm                      в) 12 cm                      г) друг отговор
- 9.** Дадени са окръжностите  $k_1(O_1; R_1 = 5$  cm) и  $k_2(O_2; R_2 = 3$  cm). Дължината на  $O_1O_2$  е число, произволно избрано от множеството  $\{0$  cm, 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm, 6 cm, 8 cm, 10 cm, 12 cm, 15 cm $\}$ . Вероятността двете окръжности да се допират е равна на:  
 а) 5 %                      б) 10 %                      в) 20 %                      г) друг отговор
- 10.** Стойностите на реалното число  $k$ , за което уравнението  $(x-2)(x^2 - 4x - k) = 0$  има единствен реален корен, независимо от кратността му, са:  
 а)  $k = -4$                       б)  $k \leq -4$                       в)  $k < -4$                       г) друг отговор

## ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише. Задачите се оценяват с по 5 точки.

**11.** Вписаната в ромба  $ABCD$  окръжност се допира до страната  $AB$  в точка  $P$ . Ако радиусът на окръжността е  $r = 12$  и  $AP = 16$ , то периметърът на ромба е равен на:

Отговор .....

**12.** Ако единият от корените на квадратното уравнение  $x^2 - 8x + a = 0$  е три пъти по-голям от другия, то стойността на параметъра  $a$  е равна на:

Отговор .....

## ТРЕТА ЧАСТ

На следващите две задачи трябва да се напише подробно решението. Задачите се оценяват с по 10 точки.

**13.** Дадено е уравнението  $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + p = 0$ , където  $p$  е реален параметър.

а) Решете уравнението при  $p = 2$ .

б) Намерете всички стойности на реалния параметър  $p$ , за които уравнението има точно три различни реални корени.

**14.** Равностранен  $\triangle ABC$  със страна 6 cm е вписан в окръжност. Точка  $M$  е от малката дъга  $BC$  така, че  $MB = 2\sqrt{3}$  cm. Докажете, че в четириъгълник  $ABMC$  може да се впише окръжност и намерете нейния радиус.

**Първа част**

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
Г (-5)	Б	В	А	В
<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
А	В	Г - 13 cm	В	Б

**Втора част**

11. 100

12. 12

**Трета част**

13 зад.

Оценяване: а) 4 точки

Полагане  $t = \frac{x^2 + 1}{x}$  и получаване на  $t^2 - 3t + 2 = 0$  1 точка

Получаване на корените 1 и 2 1 точка

$\frac{x^2 + 1}{x} = 1$  няма корени 1 точка

$\frac{x^2 + 1}{x} = 2$  има един двоен корен  $x = 1$  1 точка

**б) 6 точки**

Разглеждаме полагането  $t = \frac{x^2 + 1}{x} \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0$  (1). За всяко  $t$  уравнението има 0, 1 или 2 различни реални корена. 1 точка

За да има началното уравнение точно три реални и различни корена, то  $t_1$  и  $t_2$  трябва да са такива, че за единия от тях да има единствен корен за  $x$ , а за другия – два корена.

2 точки

От дискриминанта на (1)  $D = t^2 - 4$  уравнението има единствен корен при  $t = \pm 2$  и два корена при  $t \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$  1 точка

1. Случай  $t_1 = 2$  от  $t^2 - 3t + p = 0$  получаваме  $p = 2$ , а от подточка а) уравнението има единствен корен 1 точка

2. Случай  $t_1 = -2$  от  $t^2 - 3t + p = 0$  получаваме  $p = -10$  и  $t_2 = 5 > 2$ , което удовлетворява условието. 1 точка

**14 зад.** Разглеждаме  $\triangle ABC$   $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ACB = 60^\circ$  като вписани.

От косинусова теорема  $AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cdot \cos 60^\circ$

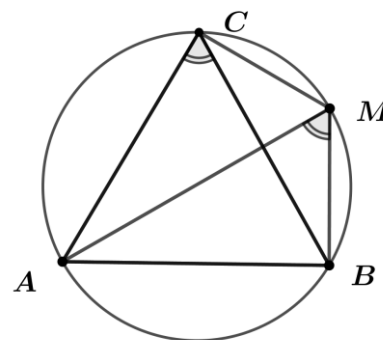
$$36 = AM^2 + 12 - 2AM \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow AM = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Тъй като

радиусът на описаната окръжност  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ , то  $AM$  е

диаметър. Триъгълниците  $ABM$  и  $ACM$  са еднакви правоъгълни  $AB = AC$  и  $MB = CB \Rightarrow AB + CM = AC + BM \Rightarrow ABMC$  е вписан.

$$S_{ABMC} = 2S_{ABM} = 2 \cdot \frac{AB \cdot BM}{2} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$



$$p_{ABMC} = AB + BM = 6 + 2\sqrt{3} \text{ cm}, r = \frac{S}{p} = \frac{12\sqrt{3}}{6 + 2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - 3$$

**Оценяване:**

Намиране на ъглите на $AM$	<u>3 точки</u>
Доказване, че $ABM$ и $ACM$ са еднакви правоъгълни	<u>2 точки</u>
Доказване, че четириъгълникът е вписан	<u>2 точки</u>
Намиране на радиуса	<u>3 точки</u>

**Забележка:** Доказването, че  $AM$  е диаметър и еднаквостта на триъгълниците може да стане и чрез синусова теорема.

Всеки друг вариант за решение може да се оценява по избран от проверяващите начин.