<u>Секция “Изток” – СМБ</u>

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 11.12.2010 г.

11 клас

<u>Времето за решаване е 120 минути.</u>

<u>Регламент:</u> Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. “Друг отговор ” се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

<u>Организаторите Ви пожелават успех!</u>

Име...училище..град......................

Зад 1. Стойността на сумата $S = 3+7+11+15+......+55$ е равна на:

а) 812; б) 406; в) не може да се определи; г) друг отговор.

Зад 2. Разстоянието между пресечните точки на графиката на функцията $f(x) = x^2 - 6x - 7$ с абсцисната ос е:

а) 5; б) 6; в) 7; г) друг отговор.

Зад 3. Градусните мерки на ъглите на триъгълник образуват аритметична прогресия. Колко градуса е най-големият ъгъл, ако той е 5 пъти по-голям от най-малкия?

а) 60^0; б) 90^0; в) 100^0; г) 120^0.

Зад 4. Стойността на $\log_3 \dfrac{3\sqrt[3]{81}}{\sqrt{27}}$ е:

а) $\dfrac{5}{6}$; б) $\dfrac{2}{3}$; в) $\dfrac{1}{2}$; г) друг отговор.

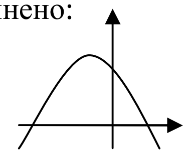
Зад 5. В телефонния номер 638*3* са изтрити две цифри. Каква е вероятността случайно избран номер от този вид да се дели на 9 и 5?

а) 1:50; б) 1:100; в) 2:90; г) друг отговор

Зад 6. Дължините на страните на триъгълник са 1, 2 и $\sqrt{7}$. Най-големият ъгъл на триъгълника е:

а) 60^0; б) 90^0; в) 135^0; г) друг отговор

Зад 7. За функцията $f(x) = ax^2 + bx + c$, чиято графика е на фигурата е изпълнено:



а) $a > 0, b < 0, c > 0$; б) $a < 0, b > 0, c > 0$;

в) $a < 0, b < 0, c > 0$; г) друг отговор.

Зад 8. *ABCD* ($AB \parallel CD$, $AD \perp AB$) е правоъгълен трапец с периметър 12 и $\angle ABC = 30^0$. Ако лицето на трапеца е максимално, то *AD* е равна на :

а) $\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{3}$; в) $3\sqrt{3}$; г) друг отговор.

Зад 9. Нека $M = 4^{\cos\alpha} - 3.2^{\cos\alpha} + 2, \alpha \in [0^0, 180^0]$. Най-голямата стойност на ***M*** е :

а) 0,75; б) 1; в) 0; г) друг отговор.

Зад 10. Дадена е функцията $f(x) = x^2 - 2x - 3$

а) да се построи графиката на $f(x)$;

б) да се определи броя на корените на уравнението $|f(x)| = a$, в зависимост от стойностите на реалния параметър $\boldsymbol{a}$.

Отговори 9 клас

1.Б); **2.**Г 8; **3.В)**; **4.**А); **5.**А); **6.**Г 120^0; **7.**В) **8.**Г 2; **9.**А

Упътвания и решения:

Зад 1. Очевидно това е сбор на аритметична прогресия с $a_1 = 3, d = 4$. Броя на елементите получаваме от формулата $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1).4 = 4n - 1 = 55 \Rightarrow n = 14$

$S = S_{14} = \dfrac{a_1 + a_n}{2}.n = \dfrac{3+55}{2}.14 = 402$

Зад 2. Пресечните точки са точно корените на уравнението, 7 и −1.

Зад 3. Нека имаме $\div\alpha < \beta < \gamma$, тогава $\gamma = 5\alpha, \beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2} = \dfrac{\alpha+5\alpha}{2} = 3\alpha$ От сбора на ъглите в триъгълника $\Rightarrow \alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180^0 \Rightarrow 9\alpha = 180^0 \Rightarrow \alpha = 20^0$, а $\gamma = 100^0$

Зад 4. $\dfrac{3\sqrt[3]{81}}{\sqrt{27}} = \dfrac{3^1.3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{1+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{5}{6}}$.

Зад 5. За да се дели на 9 сборът от цифрите се дели на 9$\Rightarrow$ 6+3+8+3+*+*=20+*+*се дели на 9. За да седели на 5 $\Rightarrow$ завършва на 0 или 5. Има две възможности 6387**3****0** и 6382**3****5.** Общият брой възможности е 10.10=100$\Rightarrow$вероятността е 2:100=1:50.

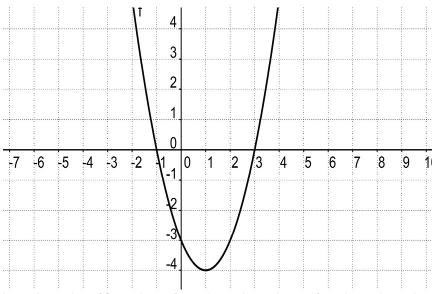
Зад 6. Най-голямата страна е $\sqrt{7}$. От косинусова теорема $\cos\varphi = \dfrac{1^2 + 2^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}{2.1.2} = -\dfrac{1}{2}$

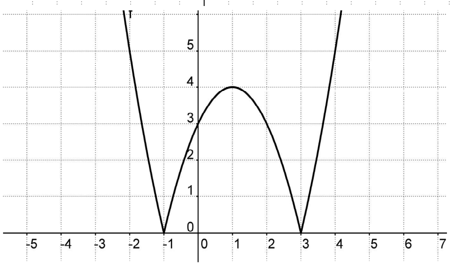
Зад 7. От вида на параболата $\Rightarrow a < 0$, от пресечната точка с ординатната ос$\Rightarrow c > 0$, от върха на параболата $-\dfrac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b < 0$

Зад 8. Нека *CH* е височина. Означаваме $AD = CH = x$, $CD = AH = y$. От правоъгълния $\Delta BCH \Rightarrow BC = 2x, AB = y + x\sqrt{3}$. От периметъра $2y + x\sqrt{3} + 3x = 12 \Rightarrow 2y + x\sqrt{3} = 12 - 3x$,

$S = \dfrac{(AB+CD)CH}{2} = \dfrac{(2y + x\sqrt{3}).x}{2} = \dfrac{x(12-3x)}{2}$. $f(x) = x(12-3x)$ има максимум във върха $x_0 = 2$.

Зад 9. Нека $t = 2^{\cos\alpha}, \cos\alpha \in [-1, 1] \Rightarrow t \in [\frac{1}{2}, 2]$. Най-голямата стойност на $M(t) = t^2 - 3t + 2$ в интервала [1/2, 2] се достига при $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M_{\max} = M\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$





Зад.10. а) (**5 точки**) в зависимост от степента на вярност и прецизност при построяването.

б**) (10 точки)** използваме , че от графиката на *f(x)*, може да получим графиката на $|f(x)|$ чрез симетрия на частта под *Ox* спрямо оста. Броят на решенията се определя от броя на пресечните точки на графиката с правата *y* = *a*, успоредна на *Ox*.

$a < 0$ няма решение,

$a = 0$ две решения

$a \in (0, 4)$ четири решения;

$a = 4$ три решения;

$a > 4$ две решения.

Задачата може да се решава и аналитично.

За всеки верен случай по **2 точки**.

Стефчо Наков
Монтана