

СМБ – Секция "ИЗТОК"
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 16.04.2011

11 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор. "Друг отговор" се приема за решение само при отбелязан верен резултат. 15 тестови задачи са разделени на групи по трудности: от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки; от 6 до 10 – с по 5 точки и от 11 до 15 – с по 7 точки.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име.....училище.....град.....

1 зад. Общият член на аритметична прогресия с първи член 3 и разлика 2 е:

- а) $2n + 3$; б) $2n + 1$; в) $3n + 2$; г) друг отговор

2 зад. Четвъртият член b_4 на геометрична прогресия за която $b_2 \cdot b_6 = 64$ е:

- а) 8; б) - 8; в) 4; г) друг отговор

3 зад. Стойността на $\sin 1470^\circ$ е:

- а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) друг отговор

4 зад. Радианната мярка на ъгъл с големина 735° е:

- а) $\frac{49\pi}{12}$; б) $\frac{7\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{12}$; г) друг отговор

5 зад. На контролно в един клас са получени две слаби оценки, четири средни, шест добри, десет много добри и една отлична. Медианата в статистическия ред от тези оценки е:

- а) 3; б) 4; в) 5; г) друг отговор

6 зад. Ординатата на върха на параболата на графиката на функцията $f(x) = x^2 - 2x + p$ е равна на 5. Стойността на p е:

- а) 1; б) 2; в) 6; г) друг отговор

7 зад. Положителните числа $x-2$, 4 и $5x+1$ в този ред образуват геометрична прогресия. Стойността на x е:

- а) 5; б) 6; в) $6/5$; г) друг отговор

8 зад. Разликата на аритметична прогресия, за която $S_n = n^2 + 2n$ за всяко n е:

- а) 1; б) 2; в) не може да се определи; г) друг отговор

9 зад. Рени иска да подреди учебниците по математика за VIII, IX, X и XI клас един върху друг на бюрото си. По колко начина може да стане това?

- а) 24; б) 12; в) 4; г) друг отговор

10 зад. В банка са вложени 2000 лева при 3% шестмесечна сложна лихва. С колко е нараснала сумата след една година и половина (с точност до една стотинка)?

- а) 2185,45 лв; б) 180 лв; в) 2180 лв; г) друг отговор

11 зад. Най-малката стойност на функцията $g(x) = \sin^2 x - \sin x - 1$ е равна на:

- а) - 3; б) $-\frac{5}{4}$; в) - 1; г) друг отговор

12 зад. Нека ъгъл $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$, за който $\cos \alpha = a^2 - 5a + 5$. Броят на всички цели стойности, които може да приема параметъра a е:

- а) 4; б) 2; в) безброй много; г) друг отговор

13 зад. Ани и Дани заедно с още 4 приятели отишли на театър, като седнали на един ред един до друг. Каква е вероятността Ани и Дани да са една до друга?

- а) $\frac{1}{120}$; б) $\frac{1}{3}$; в) не може да се определи; г) друг отговор

14 зад. Градусните мерки на ъглите в един триъгълник образуват аритметична прогресия. Ако най-голямата страна е четири пъти по-голяма от най-малката, то косинус на най-големият ъгъл е:

- а) $-\frac{\sqrt{13}}{13}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) не може да се определи; г) друг отговор

15 зад. Всички стойности на параметъра a , за които уравнението $x^3 - ax^2 + 8x = 0$ има три реални и различни корени, които в някакъв ред образуват аритметична прогресия са:

- а) $a = 6$; б) $a = 8$; в) $a = 0$; г) друг отговор

Отговори 11 клас.

1 - Б; 2-Г ±8; 3 - Б; 4 - А; 5 - Б; 6 - В 7 - Г 3; 8 - Б
 9 - А; 10 - Г 185,45; 11 - Б; 12 - А; 13 - Б; 14 - А; 15 - Г ±6.

Кратки упътвания:

1. зад. $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$.

2. зад. $b_2 b_4 = b_1 q b_1 q^3 = (b_1 q^2)^2 = b_4^2 = 64 \Rightarrow b_4 = \pm 8$

3. зад. $\sin 1470^\circ = \sin(1440^\circ + 30^\circ) = \sin(4 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ$

4. зад. $735^\circ = 735 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.

6. зад. Абсцисата на върха е $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$, $f(1) = p - 1 = 5 \Rightarrow p = 6$

7. зад. От свойството на геометричната прогресия $4^2 = (x-2)(5x+1)$ с положителен корен е 3.

8. зад. При $n=1 \Rightarrow S_1 = a_1 = 3$, при $n=2 \Rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 5 \Rightarrow d = 2$

9. зад. $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

10. зад. Имаме три периода $K_3 = 2000 \cdot 1.03^3 \approx 2185,54$, тогава сумата е нараснала с 185,45 лв.

11. зад. Нека $\sin \alpha = t \Rightarrow$ търсим най-малката стойност на $f(t) = t^2 - t + 1, t \in [-1; 1]$. Върхът на параболата $\frac{1}{2}$ е в този интервал, следователно НМСт е $f(1/2) = -5/4$

12. зад. Стойностите на параметъра за които има смисъл са $\begin{cases} a^2 - 5a + 5 \leq 1 \\ a^2 - 5a + 5 \geq -1 \end{cases}$. Решение на системата са интервалите $a \in [1; 2] \cup [3; 4]$

13. зад. Броят на всички възможни наредби е $P_6 = 6!$. Нека да вземем Ани и Дани заедно за един човек, тогава броя на всички благоприятни наредби е $2 \cdot P_5 = 2 \cdot 5!$ (по две за възможните размествания на Ани и Дани) $P(A) = \frac{2P_5}{P_6} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{3}$

14. зад. От свойството на аритметичната прогресия, лесно се установява, че средният по големина ъгъл е 60° . Нека страните са $a < x < 4a$. От косинусова теорема следва за средната страна $x^2 = a^2 + 16a^2 - 2 \cdot a \cdot 4a \cdot \cos 60^\circ = 17a^2 - 4a^2 = 13a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{13}$. От същата теорема за най-големия ъгъл $\cos \varphi = \frac{a^2 + 13a^2 - 16a^2}{2 \cdot a \cdot a\sqrt{13}} = -\frac{\sqrt{13}}{13}$

15. зад. Очевидно един корен е $x_1 = 0$, а x_2 и x_3 са корени на $x^2 - ax + 8 = 0$. За прогресията имаме два случая - $x_1 = 0$ да е среден елемент, или $x_1 = 0$ да е краен елемент. От свойството на аритметичната прогресия и формулите на Виет имаме: в първия случай $2x_1 = x_2 + x_3 = a = 0$, но тогава уравнението няма реални корени. Във втория - без ограничение $2x_2 = x_1 + x_3 = x_3$, $x_2 x_3 = 2x_2^2 = 8 \Rightarrow x_2 = \pm 2$, но $a = x_2 + x_3 = 3x_3 = \pm 6$

Стефчо Наков
Монтана