Секция „Изток” СМБ
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ
12 клас
Време за решаване 120 минути. Организаторите Ви пожелават успех!

Име ....Училище .... Град ....

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор” се приема за решен, само ако е отбелязан верният резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

1. Ако $a > 0$ и A = $\sqrt[6]{a^5}\sqrt[18]{a^{-1}}$, B = $a^{-\frac{2}{9}}$, то частното A:B е равно на:
а) $\sqrt{a}$; б) a; в) a^2; г) друг отговор.

2. Решенията на неравенството $\frac{x}{x-1} > 2$ са:
а) $x \in (1, 2)$; б) $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$; в) $x \in (-\infty, 2)$; г) друг отговор.

3. Произведението от корените на уравнението $x + \frac{1}{x} = 2\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$, където $m \neq |n|$ е:
а) 2; б) $m+n$; в) 1; г) друг отговор.

4. Корените на уравнението $(x^2 - 4x+4)^2 + (x-2)^2 - 2 = 0$ са:
а) 6; 1; б) 3; -1; в) 6; 3; г) друг отговор.

5. Корените на уравнението $\sqrt{x-2} = 4 - x$ са:
а) 6; б) 3; в) 6 и 3; г) друг отговор.

6. Дадена е аритметичната прогресия 3, 6, 9.... Ако $a_n = 120$ е член на прогресията с номер n, то n е равно на:
а) 50; б) 38; в) 40; г) друг отговор.

7. Ако $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ и $\sin\alpha = 12/13$, то стойността на $\cos\alpha$ е:
а) -5/13; б) 1; в) 5/13; г) друг отговор.

8. Даден е ромбът $ABCD$ и точката $M \in AB$ такава, че $AM:MB = 3:2$. Ако AC пресича DM в точката N, то отношението $MN:ND$ е равно на:
а) 3:5; б) 2:3; в) 1:2; г) друг отговор.

9. В правоъгълен триъгълник медианите към катетите са равни на $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Дължината на хипотенузата е равна на:
а) 5; б) 6; в) 12; г) друг отговор.

10. Точка O е център на описаната около триъгълника ABC окръжност. Ако $AO = R$ и $\angle ACB = \gamma$, $\gamma > 90^0$, то лицето на триъгълника AOB е равно на:
а) $R^2\sin 2\gamma$; б) $1/2R^2\sin 2\gamma$; в) $-R^2\sin 2\gamma$; г) друг отговор.

11. Диагоналите на равнобедрен трапец са перпендикулярни помежду си. Ако височината на трапеца е 8см, то лицето му е равно на:
а) 64 см^2; б) 32 см^2; в) 16 см^2; г) друг отговор.

12. Най-малкият корен на уравнението $(\log_3 x)^2 - \log_3 x = 2$ е равен на:
а) 1/9; б) 9; в) 1/3; г) друг отговор.

ВТОРА ЧАСТ.

Следващите задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише.
Задачите се оценяват с по 3 точки.

13. Да се реши неравенството $\dfrac{2-x}{x^2-x-2}<1$ Отговор:............................

14. Към вписаната в равнобедрения триъгълник *ABC* окръжност е построена допирателна *MN* ($M\in AC$, $N\in BC$), успоредна на основата *AB*. Точката *M* разделя бедрото *AC* на отсечки с дължини 1см и 2 см, считано от основата. Да се намери дължината на *MN* в сантиметри.

Отговор: ....

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише подробно решението.
Задачите се оценяват с по 10 точки.

15. Ако $\mathrm{tg}\alpha = 1/5$, да се намери стойността на израза $A = \dfrac{5}{5+\sin 2\alpha}$.

16. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{array}\right.$

17. Дадена е окръжност k с център *O* и радиус *R*. Даден е диаметърът *CD* на *k* и хорда *AB*, успоредна на *CD*. Върху диаметъра или на продължението му е взета точка *M*. Да се докаже, че сумата $AM^2 + BM^2$ не зависи от положението на хордата при дадено положение на точката *M*.

ОТГОВОРИ

Тест 1

1. б). 2. а). 3. в). 4. г)$x_1 = 3$, $x_2 = 1$. 5. б). 6. в). 7. а). 8. а). 9. г) 10. 10. г) $-\frac{1}{2}R^2 \sin 2\gamma$. 11. а). 12. в). 13. $x \in (-\infty,\ -2) \cup (-1,\ 2) \cup (2,\ \infty)$. 14. $MN = 0{,}8$ cm. 15. $A = \frac{13}{14}$.

РЕШЕНИЯ

13. Преобразуваме даденото неравенство и получаваме

$$\frac{2-x}{x^2-x-2} < 1 \iff \frac{2-x-x^2+x+2}{x^2-x-2} < 0 \iff \frac{x^2-4}{x^2-x-2} > 0.$$

Оттук имаме

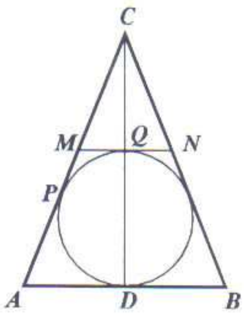
$$(x-2)(x+1)(x-2)(x+2) > 0 \iff (x-2)^2(x+1)(x+2) > 0.$$

При $x \neq 2$ получаваме $(x+1)(x+2) > 0$.

Следователно $x \in (-\infty,\ -2) \cup (-1,\ 2) \cup (2,\ \infty)$.

14. Допирните точки на AB, AC и MN с окръжността означаваме съответно с D, P и Q. Означаваме $MQ = x$, тогава $AD = AP = 1 - x$. От $\triangle MQC \sim \triangle ADC$ имаме $\frac{MQ}{AD} = \frac{MC}{AC}$, т. е. $\frac{x}{1-x} = \frac{2}{3}$, откъдето $x = \frac{2}{5} = 0{,}4$ cm.

Следователно $MN = 2x = 0{,}8$ cm.



15. От $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$ следва, че $5\sin\alpha = \cos\alpha$. Като вземем предвид, че $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, намираме, че $\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{26}}$ и $\cos\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{26}}$. Тъй като $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0$, то и $\sin\alpha.\cos\alpha > 0$. Тогава

$$A = \frac{5}{5+\sin 2\alpha} = \frac{5}{5+2\sin\alpha.\cos\alpha} = \frac{5}{5+2.\frac{5}{26}} = \frac{5.13}{5.13+5} = \frac{13}{14}.$$

16. От първото уравнение на системата изваждаме второто и записваме

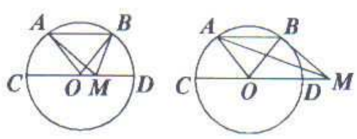
$$\left| \begin{array}{l} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} (x+y)^2-2xy=5 \\ xy=2 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} (x+y)^2=9 \\ xy=2. \end{array} \right.$$

Оттук получаваме системите

$$\left| \begin{array}{l} x+y=3 \\ xy=2 \end{array} \right. \text{ и } \left| \begin{array}{l} x+y=-3 \\ xy=2. \end{array} \right.$$

Решенията на първата система са $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ и $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, а на втората $x_3 = -1$, $y_3 = -2$ и $x_4 = -2$, $y_4 = -1$.

17. Съгласно косинусовата теорема за триъгълниците BOM и AOM имаме



$$BM^2 = R^2 + OM^2 - 2R.OM.\cos\sphericalangle BOM,$$

$$AM^2 = R^2 + OM^2 + 2R.OM.\cos\sphericalangle BOM.$$

Оттук $AM^2 + BM^2 = 2(R^2 + OM^2)$. Следователно $AM^2 + BM^2$ не зависи от положението на хордата AB при дадено положение на точката M.

Отговори:

1 – б; 2 – а; 3 – в; 4 – г $x_1 = 3$, $x_2 = 1$; 5 – б; 6 – в; 7 – а; 8 – а; 9 – г 10; 10 – г $-1/2R^2\sin 2\gamma$; 11 – а; 12 – в;
13 – $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (2, \infty)$; 14 – MN = 0,8 см; 15 – A = 13/14.

16. От първото уравнение на системата изваждаме второто и записваме
$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x+y)^2 - 2xy = 5 \\ xy = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x+y)^2 = 9 \\ xy = 2 \end{array} \right.$ Получаваме системите $\left| \begin{array}{l} x+y = 3 \\ xy = 2 \end{array} \right.$ и $\left| \begin{array}{l} x+y = -3 \\ xy = 2 \end{array} \right.$ Решенията на първата система са $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ и $x_1 = 2$, $y_2 = 1$, а на втората $x_3 = -1$, $y_3 = -2$ и $x_4 = -2$, $y_4 = -1$.

17. Съгласно косинусовата теорема за триъгълниците BOM и AOM имаме $BM^2 = R^2 + OM^2 - 2R.OM.\cos\angle BOM$, $AM^2 = R^2 + OM^2 - 2R.OM.\cos\angle BOM$. Оттук $AM^2 + BM^2 = 2(R^2 + OM^2)$. Следователно $AM^2 + BM^2$ не зависи от положението на хордата AB при дадено положение на точката M.