

Секция “Изток” – СМБ
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 26.04.2009г.
12 клас

Времето за решаване е 120 минути.
Организаторите Ви пожелават успех!

Име.....училище.....град.....

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен. “Друг отговор” се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки:

1зад. Броят на различните цели числа, които са решенията на неравенството $\frac{(x-1)(3-x)}{x(x-4)} \geq 0$, е равен на:

- а) 1; б) 2; в) 3; г) друг отговор

2зад. Стойността на израза $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2009}}$ е равна на:

- а) 1 б) $1-\sqrt{2009}$ в) -1 г) друг отговор

3зад. Ако $A = \frac{10^{2007}+1}{10^{2008}+1}$ и $B = \frac{10^{2008}+1}{10^{2009}+1}$, то:

- а) $A < B$ б) $A = B$ в) $A > B$ г) не могат да се сравнят

4зад. Решенията на неравенството $|x^2 - 5x| < 6$ са:

- а) $(-1;2) \cup (3;6)$ б) $[-1;6]$ в) $[-3;5] \cup [6;8]$ г) друг отговор

5зад. За системата $\begin{cases} x^2 y + xy^2 = 20 \\ x^3 + y^3 = 65 \end{cases}$ стойността на xy е:

- а) 1 б) 4 в) 3 г) друг отговор

6зад. Ако $x_1 < x_2$ са корените на уравнението $\sqrt{\frac{x+2}{3x+1}} + \sqrt{\frac{3x+1}{x+2}} = \frac{5}{2}$, то $x_1 - x_2$ е равно на:

- а) $-\frac{5}{11}$ б) $-7\frac{2}{11}$ в) $-6\frac{9}{11}$ г) друг отговор

7зад. Ако в правоъгълен триъгълник медиана с дължина m дели правия ъгъл в отношение 1:2, то лицето на триъгълника е равно на:

- а) $2m^2$ б) $\frac{m^2\sqrt{3}}{2}$ в) $m^2\sqrt{3}$ г) друг отговор

8зад. Ако за $\triangle ABC$ $\angle C = 105^\circ$, $\angle A = 45^\circ$ и височината към BC е равна на 3 см, то дължината на страната AB е равна на:

- а) $6\sqrt{2}$ б) $6\sqrt{3}$ в) $3\sqrt{2}$ г) друг отговор

9зад. В $\triangle ABC$ точката M е средата на страната AB , точката N е средата на CM , $CP = \frac{2}{5}CA$ ($P \in AC$) и

$CQ = \frac{1}{3}CB$ ($Q \in BC$). Ако лицето на $\triangle CPN$ е 12 cm^2 , то лицето на $\triangle BQN$ е равно на:

- а) 10 cm^2 б) 20 cm^2 в) 30 cm^2 г) друг отговор

10зад. Ако за $\triangle ABC$ ($CA = CB = 1$) AL , BE и CF са ъглополовящи и точките E , F , L и C лежат на една окръжност, то дължината на страната AB е равна на:

- а) $0,5(\sqrt{17}-1)$ б) $\sqrt{17}-1$ в) $0,5(\sqrt{17}+1)$ г) друг отговор

11зад. Ако $\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, то стойността на израза $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ е равна на:

- а) $\frac{3}{5}$ б) $-\frac{1}{5}$ в) $-\frac{7}{25}$ г) друг отговор

12зад. Ако $\angle BAD = 60^\circ$ в успоредника $ABCD$ и окръжността с радиус R , минаваща през върховете A , B и D разполовява страната CD , то лицето на успоредника е равно на:

- а) R^2 б) $2R^2\sqrt{3}$ в) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се напише.

Задачите се оценяват с по 3 точки:

13зад. Да се намерят всички цели стойности на параметъра k , за които уравнението $\frac{1}{2}kx^2 - 10x + 2k = 0$ има за корен естествено число.

Отговор:

14зад. Решете уравнението $3\log_8(x+1) = 8 + 3\log_{x+1} 8$

Отговор:

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише подробно решението.

Задачите се оценяват с по 10 точки:

15зад. а) Дадено е, че $\frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2} = k$. Да се намерят стойностите на k , за които $\frac{x}{2} - \frac{3}{x} = 0$.

б) Да се реши уравнението $\frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2} = 7\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right)$

16зад. Ъглите α, β, γ на $\triangle ABC$, взети в този ред, образуват аритметична прогресия. Да се намерят ъглите на триъгълника, ако $\cos \alpha + \operatorname{tg} \beta + \sin \gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1$.

17зад. В $\triangle ABC$ точка M е среда на страната AB , точките P и Q лежат на страната BC и са такива, че $BP = PQ = QC$ и $\angle PMQ = \angle AMQ + \angle BMP$.

а) Да се докаже, че $BC = 3AC$

б) Ако четириъгълникът $AMQC$ е вписан в окръжност, да се намери отношението $\frac{MP}{MQ}$.

Отговори и кратки решения

Първа част:

1зад.	2зад.	3зад.	4зад.	5зад.	6зад.	7зад.	8зад.	9зад.	10зад.	11зад.	12зад.
б	$\frac{\Gamma}{\sqrt{2009}} - 1$	в	а	б	в	б	в	б	а	в	$\frac{\Gamma}{R^2\sqrt{3}}$

Втора част:

13зад. Ако $k = 0$, то $x = 0$, но то не е естествено число. Нека $k \neq 0$. Тогава $x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4k^2}}{k}$ за $k \in [-5; 0) \cup (0; 5]$ (тогава D е неотрицателна). След непосредствена проверка се получава, че при $k = 5$, $x = 2$; $k = 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; $k = 3$, $x = 6$

Отговор: 3; 4; 5

14зад. ДС: $x \neq 0$; $x > -1$. След полагане $y = \log_8(x+1)$ получаваме уравнението $3y^2 - 8y - 3 = 0$, което има корени $y_1 = -\frac{1}{3}$; $y_2 = 3$. След решаване на двете основни логаритмични уравнения получаваме

$$x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = 511$$

Отговор: $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 511$

Трета част:

15зад. а) $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right)^2 = 0$, тогава $\frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2} - 3 = 0$, от където $k = 3$

б) Полагаме $\frac{x}{2} - \frac{3}{x} = y$, при $x \neq 0$. Повдигаме двете страни на квадрат и след няколко преобразования

получаваме $y^2 + 3 = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2}\right)$, след което стигаме до уравнението $2y^2 - 7y + 6 = 0$, за което

$y_1 = \frac{3}{2}$; $y_2 = 2$. При $y = \frac{3}{2}$ корените на даденото уравнение са $\frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$, а при $y = 2$ са $2 \pm \sqrt{10}$

16зад. От това, че α, β, χ образуват аритметична прогресия следва, че

$$\beta = \frac{\alpha + \chi}{2} = \frac{180^\circ - \beta}{2} \Rightarrow \beta = 60^\circ. \text{ Тогава } \alpha = 60^\circ - x, \text{ а } \chi = 60^\circ + x. \text{ Получаваме}$$

$$\cos(60^\circ - x) + \operatorname{tg} 60^\circ + \sin(60^\circ + x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1; 2 \sin(x + 45^\circ) \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1); \sin(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1) = \sin 75^\circ; x + 45^\circ = 75^\circ;$$

$$x = 30^\circ; \alpha = 30^\circ; \chi = 90^\circ.$$

17зад. а) Тъй като $S_{PMQ} + S_{AMQ} + S_{BMP} = 180^\circ$, то $S_{PMQ} = 90^\circ$.

Нека $CN = NB$. Тогава $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$. Но $MN = \frac{1}{2}QP$ ($S_{PMQ} = 90^\circ$, $QN = NP$) и $AC = PQ$, $BC = 3AC$.

б) Понеже $AMQC$ е висан в окръжност, то $S_{CAM} = S_{MQP} = S_{QMN} = \alpha$.

Тогава $\angle MNB = 2\alpha$ (външен за $\triangle MNQ$). Тъй като MN е средна отсечка в $\triangle ABC$, то $MN \parallel AC$. След. $\angle ACB = 2\alpha$.

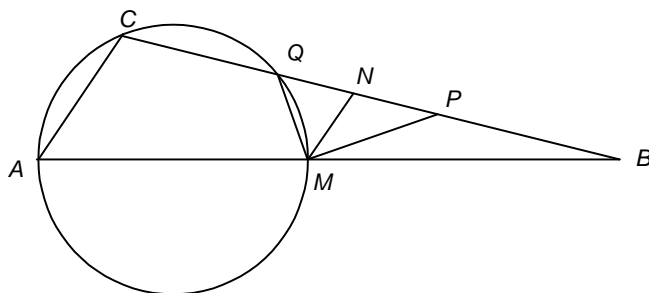
Означаваме $\angle ABC = \beta \Rightarrow \beta = 180^\circ - 3\alpha$. От

$BC = 3AC$ и синусовата теорема за $\triangle ABC$

намираме, че $\sin \alpha = 3 \sin \beta$, т.е.

$$\sin \alpha = 3 \sin(180^\circ - 3\alpha) = 3 \sin 3\alpha, \sin \alpha = 3 \sin \alpha (4 \cos^2 \alpha - 1), \text{ от където } \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}. \text{ Тогава } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \text{ От правоъгълния триъгълник } MPQ \text{ получаваме } \frac{MP}{MQ} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{2}.$$



ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ
26 АПРИЛ 2009г.

Трите имена
Училище клас
Град (село).....

Общ брой точки от Първа част:
Общ брой точки от Втора част:
Общ брой точки от Трета част:

Краен брой точки:

ПЪРВА ЧАСТ:

1зад.	2зад.	3зад.	4зад.	5зад.	6зад.	7зад.	8зад.	9зад.	10зад.	11зад.	12зад.

ВТОРА ЧАСТ:

13зад. Отговор:

14зад. Отговор:

ТРЕТА ЧАСТ: