

Секция “Изток” – СМБ
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 12.12.2009г.
12 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име.....училище.....град.....

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен. “Друг отговор ” се приема за решение само при отбелязан верен резултат.

Задачите се оценяват с по 2 точки:

1 зад. Стойността на израза $\frac{20}{99} + 0,2 + \frac{0,097}{1-0,01}$ е равна на:

- а) $\frac{299}{990}$ б) $\frac{495}{990}$ в) 23 г) друг отговор

2 зад. Произведението от корените на уравнението $3^{x^2+4x} = \frac{1}{27}$ е равно на:

- а) 3 б) -3 в) -1 г) друг отговор

3 зад. Решенията на уравнението $\sqrt{x+5} + 1 = \frac{6}{\sqrt{x+5}}$ са:

- а) 4 б) 4; -1 в) -4 г) друг отговор

4 зад. Стойността на израза $\frac{\operatorname{tg}25^\circ + \operatorname{tg}20^\circ}{1 + \operatorname{tg}155^\circ \operatorname{tg}20^\circ}$ е равна на:

- а) 1 б) $\operatorname{tg}5^\circ$ в) -1 г) друг отговор

5 зад. За кои стойности на параметъра k системата $\begin{cases} kx + 5y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ няма решение?

- а) -10 б) 10 в) -7 г) друг отговор

6 зад. Стойността на k , за която е вярно равенството $27(\sqrt{3})^{k+2} = 3^k$ е:

- а) -3 б) 3 в) 5 г) друг отговор

7 зад. Страната на квадрат, вписан в кръг с лице 64 cm^2 е равна на:

- а) $16 \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ cm}$ б) $8 \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ cm}$ в) $8 \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \text{ cm}$ г) друг отговор

8 зад. Ако точка от хипотенузата в правоъгълен триъгълник, която е равноотдалечена от катетите, дели хипотенузата на отсечки с дължини 30 см и 40 см, то периметърът на триъгълника е равен на:

- а) 168 см б) 144 см в) 192 см г) друг отговор

9 зад. За геометрична прогресия е дадено $a_1 + a_5 = 51$ и $a_2 + a_6 = 102$. Ако $S_n = 3069$, то n е равно на:

- а) 6 б) 8 в) 12 г) друг отговор

10 зад. В равнобедрен трапец е вписана окръжност с радиус r . Горната основа на трапеца е два пъти по-малка от неговата височина. Лицето на трапеца е равно на:

- а) r^2 б) $10r^2$ в) $5r^2$ г) друг отговор

11 зад. Броят на трицифрените числа с различни цифри, които могат да се образуват от цифрите 0, 2, 4, 6 и 8 е равен на:

- а) 48 б) 60 в) 72 г) друг отговор

12 зад. Ако едната страна на триъгълника е равна на 26 см, а медианите към другите две страни са съответно 30 см и 39 см, то лицето на триъгълника е равно на:

- а) 720 cm^2 б) 1440 cm^2 в) 360 cm^2 г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се напише.

Задачите се оценяват с по 3 точки:

13 зад. Стойността на $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta)$, ако $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, $\operatorname{cotg}\beta = 3$ е равна на:

Отговор:.....

14 зад. В триъгълник ABC ъгъл B е прав. Върху катета CB са дадени точките D и E , така че отсечките AD и AE делят ъгъл A на три равни части и $AD = a$, $AE = b$ ($b < a$). Отношението на лицата на триъгълниците ADB и AEB е равно на:

Отговор:.....

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише решението.

Задачите се оценяват с по 10 точки:

15 зад. Ако сборът на две числа, тяхната разлика и тяхното произведение са в отношение 5:1:18, намерете числата.

16 зад. Нека x_1, x_2 са реални корени на уравнението $x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8 = 0$, където a е реален параметър и $x_1^2 + x_2^2 = S$. Да се намерят стойностите на параметъра a , за които S приема най-малка стойност и да се намери тази най-малка стойност.

17 зад. Окръжност се допира до раменете на ъгъл с връх O в точките A и B . Върху дъгата от окръжността, която е вътрешна за триъгълник AOB е взета точка C . Разстоянията от т. C до OA и OB са равни съответно на a и b . Да се намери разстоянието от т. C до хордата AB .

Кратки решения и отговори
ПЪРВА ЧАСТ

- 1зад. Отг. в)
2зад. Отг. а)
3зад. Отг. г) -1
4зад. Отг. а)
5зад. Отг. б)
6зад. Отг. г) 8
7зад. Отг. в)
8зад. Отг. а)
9зад. Отг. г) 10
10зад Отг. в)
11зад. Отг. а)
12зад.Отг. а)

ВТОРА ЧАСТ

13зад. Отг. 1

14зад. Отг. $\frac{b + \sqrt{b^2 + 8a^2}}{2b}$

ТРЕТА ЧАСТ

15зад. Ако означим търсените числа с x , y , то $\frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{1} = \frac{xy}{18}$. Числата са 9 и 6.

16зад. $x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8 = 0$. За да има това уравнение реални корени трябва $D = -a^2 + 6a - 8 \geq 0$, т.е. $2 \leq a \leq 4$. $S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 12a - 6$. S приема най-малка стойност при $a = 2$ и $S_{\min} = 8$.

17зад. Нека $CE \perp OA$, $CE = a$, $CF \perp OB$, $CF = b$ и $CD \perp AB$. $\triangle VADC \sim \triangle VBFC$ ю $\frac{CD}{b} = \frac{AC}{CB}$ и $\triangle VBDC \sim \triangle VAEC$ ю $\frac{a}{CD} = \frac{AC}{CB}$ следователно $\frac{CD}{b} = \frac{a}{CD}$ ю $ab = CD^2$ ю $CD = \sqrt{ab}$.