<u>Секция “Изток” – СМБ</u>

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 11.12.2010г.

12 клас

<u>Времето за решаване е 120 минути.</u>

<u>Организаторите Ви пожелават успех!</u>

Име...училище.........................град.....................

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор” се приема за решение само ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

1. След опростяване на израза $\dfrac{x^{-5}\sqrt[7]{x}}{x^{-2}x^{-2\frac{6}{7}}}$ ($x\neq 0$) се получава:

а) x; б) x^3; в) 1; г) друг отговор.

2. Всички цели стойности на параметъра a, за които уравнението $(a-12)x^2-2(a-12)x+3=0$ няма реални корени са:

а) 13 и 14; б) 13, 14 и 15; в) 12, 13 и 14; г) друг отговор.

3. Дефиниционната област на функцията $y = \log_5\left|x^2-3x+2\right|$ е:

а) $x \in (-\infty, +\infty)$; б) $x \in (-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (2, +\infty)$; в) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; г) друг отговор.

4. Решенията на уравнението $(x^2+5x+6)\sqrt{x+2}=0$ са:

а) -2; б) -3; в) -2 и -3; г) друг отговор.

5. Най-малкото цяло число, което е решение на неравенството $2^{x-2}>16^{-\frac{1}{x}}$ е:

а) 3; б) 2; в) 0; г) друг отговор.

6. Сборът на модата и средноаритметичното на извадката 5, 7, 1, 5, 10, 2, е:

а) 11; б) 10; в) 2; г) друг отговор.

7. Броят на различните начини, по които от 6 момчета и 4 момичета може да се образува група от 3 момчета и 3 момичета е равен на:

а) 36 ; б) 80; в) 96 г) друг отговор.

8. Диагоналите AC и BD на трапеца $ABCD$ се пресичат в точката O, а продълженията на бедрата AD и BC в точка M. Ако $DO:OB = 3:5$, то отношението $AD:DM$ е равно на:

а) 2:3; б) 3:2; в) 2:5; г) друг отговор.

9. Средната основа на трапец е 12 и дели лицето на трапеца в отношение 3:5. Дължините на основите са:

а) 5 и 15; б) 6 и 18; в) 3 и 9; г) друг отговор.

10. В остроъгълния триъгълник ABC са построени височините AH ($H\in BC$) и CD ($D\in AB$). Ако $AD=BC=5$ и $DB=3$, то дължината на AH е:

а) $5\frac{4}{5}$; б) 6; в) $6\frac{2}{5}$; г) друг отговор.

11. Страните на правоъгълен триъгълник образуват аритметична прогресия с разлика 2. Медианата към хипотенузата на този триъгълник е:

а) 6; б) 5; в) 4; г) друг отговор.

12. Даден е равнобедрен триъгълник с дължина на височината към основата 10 и височина към бедрото 12. Лицето на триъгълника е:

а) 70; б) 75; в) 80; г) друг отговор.

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише. Задачите се оценяват с по 3 точки.

13. Да се намери стойността на $\sin\alpha$, ако $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=1{,}4$.

Отговор:..........................

14. През точка M към окръжност k с радиус, равен на 4 см, е прекарана допирателна, която се допира до k в точката C, и секуща, минаваща през центъра O на окръжността и пресичаща k в точките A и B така, че $MA=AO$. Точката N е средата на по-малката дъга AC. Да се намери лицето на триъгълника MON.

Отговор:.................................

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише подробно решението. Задачите се оценяват с по 10 точки.

15. Да се намери стойността на $x–y$ от системата:

$$\begin{cases} x^2y-xy^2=1 \\ x^3-y^3=11 \end{cases}$$

16. Даден е правоъгълният триъгълник ABC ($\angle C=90^0$). Построена е височината CH ($H\in AB$) и медианата CL ($L\in HB$) на триъгълника HBC. Да се намери $\cos\angle LCB$, ако е известно, че $CL=4$ и $AH=\frac{9}{2\sqrt{7}}$.

17. Даден е изпъкналият четириъгълник $ABCD$ със страни $AB=4$, $BC=3$, $CD=2$ и $AD=1$, който е вписан в окръжност. Да се намери радиусът на тази окръжност.

ОТГОВОРИ

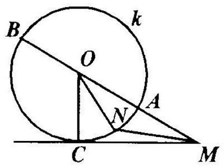
1. в). **2.** в). **3.** б). **4.** а). **5.** г) $x = 1$. **6.** б). **7.** б). **8.** а). **9.** б). **10.** в). **11.** б). **12.** б). **13.** $0{,}96$. **14.** $8\ \text{cm}^2$ **15.** $x - y = 2$. **16.** $\cos\sphericalangle LCB = \frac{46}{8\sqrt{37}}$. **17.** $R = \frac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$.

РЕШЕНИЯ

13. Като вземем предвид, че от $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = 1{,}4$ следва

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 1{,}96 \iff 1 + \sin\alpha = 1{,}96$$

заключаваме, че $\sin\alpha = 1{,}96 - 1 = 0{,}96$.



14. В правоъгълния $\triangle MOC$ имаме $OC = \frac{1}{2}MO$, следователно $\sphericalangle CMO = 30°$, а $\sphericalangle MOC = 60°$. По условие $\overset{\frown}{CN} = \overset{\frown}{NA}$. Тогава $\sphericalangle NOA = \frac{1}{2}\sphericalangle COA = 30°$. Лицето на $\triangle MON$ е $S_{MON} = \frac{1}{2}ON.MO.\sin\sphericalangle MON = \frac{1}{2}.4.8.\frac{1}{2} = 8\ \text{cm}^2$

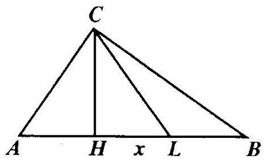
15. Преобразуваме дадената система и получаваме

$$\left|\begin{array}{l} xy(x-y) = 1 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2) = 11 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} xy(x-y) = 1 \\ (x-y)\Big((x-y)^2+3xy\Big) = 11. \end{array}\right.$$

Заместаме $xy = \frac{1}{x-y}$ във второто уравнение на системата и получаваме

$$(x-y)\left((x-y)^2 + \frac{3}{x-y}\right) = 11 \iff (x-y)^3 = 8,$$

откъдето $x - y = 2$.



16. Означаваме $HL = x$. Имаме

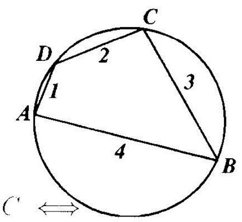
$$CH^2 = AH.HB \iff CL^2 - HL^2 = AH.HB \iff$$
$$16 - x^2 = \frac{9}{2\sqrt{7}}.2x \iff x^2 + \frac{9}{\sqrt{7}}x - 16 = 0,$$

откъдето

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{-9}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{81}{7} + 64}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{-9+23}{\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}.$$

Оттук $LH = x = \sqrt{7}$, $BC = \sqrt{CH^2 + HB^2} = \sqrt{16 - x^2 + 4x^2} = \sqrt{16 + 3.7} = \sqrt{37}$.
Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle LCB$ и получаваме

$$\cos\sphericalangle LCB = \frac{BC^2 + CL^2 - LB^2}{2.BC.CL} = \frac{37 + 16 - 7}{2.\sqrt{37}.4} = \frac{46}{8\sqrt{37}}.$$



17. Тъй като $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180°$, то като приложим косинусовата теорема за $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$, получаваме

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\sphericalangle ABC$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2.AD.DC.\cos\sphericalangle ADC.$$

Приравняваме двете равенства и последователно получаваме

$$4^2 + 3^2 - 2.3.4.\cos(180° - \sphericalangle ADC) = 1^2 + 2^2 - 2.1.2.\cos\sphericalangle ADC \iff$$

$$16+9+24\cos\sphericalangle ADC = 1+4-4\cos\sphericalangle ADC \iff 28\cos\sphericalangle ADC = 5-25 \iff \cos\sphericalangle ADC = \frac{-5}{7}$$

откъдето

$$\sin\sphericalangle ADC = \sqrt{1 - \frac{5^2}{7^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \text{ и } AC^2 = 5 - 4.\left(\frac{-5}{7}\right) = 5 + \frac{20}{7} = \frac{55}{7}$$

Прилагаме синусовата теорема за $\triangle ADC$ и получаваме $\frac{AC}{\sin\sphericalangle ADC} = 2R$, където R е радиусът на описаната около $\triangle ACD$ окръжност. Заместваме AC и $\sin\sphericalangle ADC$ с намерените стойности и получаваме $\frac{\sqrt{\frac{55}{7}}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}} = 2R$, откъдето $R = \frac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$.