12. клас

Време за решаване 120 минути.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име ………………………………………училище…………………град…………………

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. "Друг отговор" се приема за решение само ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

1. Ако $a=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, то:

А) $a=1$; Б) $a=2$; В) $a=3\sqrt{3}$; Г) друг отговор.

2. Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $x^2-6x+1=0$, то изразът $x_1^2+x_2^2$ е равен на:

А) 18; Б) 24; В) 34; Г) друг отговор.

3. Произведението на модата и медианата на данните $4, 3, 4, 1, 11, 9, 7, 6$ е:

А) 12; Б) 15; В) 20; Г) друг отговор.

4. Ако за аритметичната прогресия $\{a_n\}$ е известно, че $a_7+a_{12}=8$, то сборът на първите осемнадесет члена на прогресията е:

А) 72; Б) 36; В) 48; Г) друг отговор.

5. Ако $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$, то $cos\alpha$ е:

А) 1; Б) $\frac{5}{4}$; В) $\frac{3}{10}$; Г) друг отговор.

6. От 6 различни химикалки и 5 различни моливи са направени подаръци от две химикалки и три моливи. Броят на възможните различни подаръци е равен на:

А) 120; Б) 180; В) 150; Г) друг отговор.

7. Броят на естествените числа, които са решения на неравенството $\sqrt{x+5}\le 1+\sqrt{5}$ е:

А) 5; Б) 3; В) 4; Г) друг отговор.

8. Окръжностите k_1 и k_2 се допират външно. Окръжността k_1 има радиус 6. От центъра O на k_2 е прекарана права, която се допира до k_1 в точката A и $OA = 8$. Дължината на радиуса на k_2 е равен на:

А) 3; Б) 4; В) $2\sqrt{2}$; Г) друг отговор.

9. Даден е правоъгълен трапец $ABCD\left(AB \parallel CD\right)$ с основа $AB = 16$, бедро $BC = 14$ и диагонал $AC = 10$. Дължината на малката основа CD е:

А) $4\sqrt{2}$; Б) 4; В) 5; Г) друг отговор.

10. Бедрото на равнобедрен триъгълник е 48, а радиусът на описаната около триъгълника окръжност е $R = 36$. Дължината на височината към основата е:

А) 24; Б) 38; В) 28; Г) друг отговор.

11. Даден е равнобедреният триъгълник ABC $(AC = BC)$ с $AB = 6cm$. Ако височината CD $\left(D \in AB\right)$ е $4cm$, то височината AN $\left(N \in BC\right)$ е:

А) $5cm$; Б) $\dfrac{24}{5}cm$; В) $\dfrac{3}{5}cm$; Г) друг отговор.

12. Даден е равнобедреният трапец $ABCD$ $\left(AB \parallel CD\right)$. Голямата му основа AB има дължина $3cm$ и $\angle ADC = 120^\circ$. Ако в трапеца може да се впише окръжност, то радиусът на тази окръжност е :

А) $1cm$; Б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}cm$; В) $2cm$; Г) друг отговор.

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише.

Задачите се оценяват с 3 точки

13. Ако (x, y) е решение на системата $\left|\begin{array}{l} x + y = 8 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{array}\right.$, да се намери на колко е равно произведението xy.

Отговор:. . . . .

14. Катетите на правоъгълен триъгълник са $3cm$ и $7cm$. Да се намери дължината на ъглополовящата на правия ъгъл на триъгълника.

Отговор:. . . . .

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише подробно решението. Задачите се оценяват с по 10 точки.

15. Ако $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$, да се намери стойноста на израза $\sqrt{\frac{1-\cos 4\alpha}{2}}$.

16. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l} x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ x + xy + y^2 = 1 \end{array}\right.$

17. От върха D на тъпия ъгъл на ромба $ABCD$ са спуснати $DP \perp AB$ $(P \in AB)$ и $DQ \perp BC$ $(Q \in BC)$. Ако $DP = DQ = a$ и $PQ = b$, да се намери лицето на ромба.

ОТГОВОРИ

1. б). 2. в). 3. в). 4. а). 5. г $\frac{4}{5}$). 6. в). 7. а). 8. б). 9. в). 10. г 32). 11. б). 12. г $\frac{\sqrt{3}}{2}$). 13. 15. 14. $\frac{21\sqrt{2}}{10}cm$. 15 . $\frac{24}{25}$. 16. $x_1 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$, $y_1 = -1$; $x_2 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$, $y_2 = -1$; $x_3 = \frac{7-\sqrt{21}}{14}$, $y_3 = \frac{7+\sqrt{21}}{14}$; $x_4 = \frac{7+\sqrt{21}}{14}$, $y_4 = \frac{7-\sqrt{21}}{14}$.

17. $\frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2-b^2}}$.

РЕШЕНИЯ

15. $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$. От $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$ получаваме $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Тогава $\sqrt{\frac{1-\cos 4\alpha}{2}} = \sqrt{\sin^2 2\alpha} = |\sin 2\alpha|$. От $\pi \le 2\alpha \le 2\pi$ следва $\sin 2\alpha \le 0$ и $|\sin 2\alpha| = -\sin 2\alpha$ $= -2\sin\alpha\cos\alpha = -2\frac{4}{5}(-\frac{3}{5}) = \frac{24}{25}$

16. Преобразуваме дадената система и получаваме

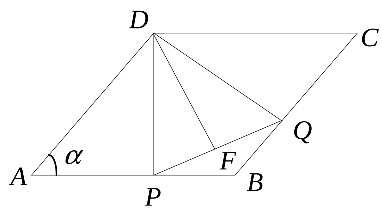
$$\left|\begin{array}{l} x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ x + xy + y^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ x(1+y) = (1+y)(1-y) \end{array}\right.$$

1. А**ко** $1+y=0$, т.е. $y=-1$, от първото уравнение на системата получаваме $x^2+5x+1=0$, откъдето $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$.Тогава решенията на системата са $x_1=\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}$, $y_1=-1$; $x_2=\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}$, $y_2=-1$.

2. А**ко** $1+y\neq 0$, получаваме системата $\left|\begin{array}{l} x^2-5xy+y^2=0 \\ x=1-y \end{array}\right.$, откъдето намираме

$x_3=\dfrac{7-\sqrt{21}}{14}$, $y_3=\dfrac{7+\sqrt{21}}{14}$; $x_4=\dfrac{7+\sqrt{21}}{14}$, $y_3=\dfrac{7-\sqrt{21}}{14}$.

17. ОзначавамеR$BAD=\alpha$.Тогава R$PDQ=\alpha$. Построяваме $DF\perp PQ$ $(F\in PQ)$ и от правоъгълния триъгълник PFD намираме $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{PF}{DP}=\dfrac{b}{2a}$.



Тогава от

$\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$ намираме

$\sin\alpha=2\dfrac{b}{2a}\sqrt{1-\dfrac{b^2}{4a^2}}=\dfrac{b}{2a^2}\sqrt{4a^2-b^2}$.

От правоъгълнияVAPD имаме $\dfrac{DP}{AD}=\sin\alpha$, откъдето $AD=\dfrac{a}{\sin\alpha}$. Тогава

$S_{ABCD}=AD^2\sin\alpha==\dfrac{a^2}{\sin\alpha}=\dfrac{2a^4}{b\sqrt{4a^2-b^2}}$