

СМБ – Секция “Изток”
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 08.12.2012г.
12 клас

Времето за решаване е 120 минути.
Организаторите Ви пожелават успех !

Име.....училище.....град.....

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор” се приема за решение само, ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

1. Ако $a = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$, то:

а) $a=1$; б) $a=2$; в) $a=3$; г) друг отговор.

2. Броят на решенията на уравнението $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + 1$ е:

а) 0; б) 1; в) 2; г) друг отговор.

3. Сборът на модата и медианата на данните 4, 3, 4, 4, 5, 7, 12, 6, 13, е:

а) 9; б) 16; в) 15; г) друг отговор.

4. Ако за аритметичната прогресия $\{a_n\}$ е известно, че $3a_{13} - a_{27} = 10$, то сборът на първите единадесет члена на прогресията е:

а) 50; б) 52; в) 60; г) друг отговор.

5. Ако $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, то $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$, е:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; г) друг отговор.

6. Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $x^2 - 4x + 1 = 0$, стойността на израза $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2$, е:

а) 1; б) 2; в) 3; г) друг отговор.

7. Ако за растяща аритметична прогресия с общ член a_n е известно, че $a_2 + a_6 = 14$, вярно е че:

а) $a_4 = 4$; б) $a_2 + a_4 + a_6 = 21$; в) $S_6 = 48$; г) друг отговор.

8. Вероятността първото изтеглено число в играта „шест от четиридесет и девет” да е четно число, е равна на :

а) $\frac{3}{25}$; б) $\frac{6}{49}$; в) $\frac{24}{49}$; г) друг отговор.

9. Даден е ромб с остър ъгъл 30° и страна 10 см. Радиусът на вписаната в ромба окръжност е:

а) 1,25 см; б) 2,5 см; в) 0,8 см; г) друг отговор.

10. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с радиус $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см и $\angle DCB = 120^\circ$. Дължината на

диагонала BD в сантиметри, е:

а) $5\sqrt{3}$; б) 5; в) $15/4$; г) друг отговор.

11. В трапецът $ABCD$ е вписана окръжност с център O . Ако $AO=4$ и $DO=3$ височината на трапеца е:

а) 4,8; б) 9,6; в) 4; г) друг отговор.

12. В правоъгълния трапец $ABCD$ голямата основа AB е 6 см и $\angle DAB = 90^\circ$, разстоянието от пресечната точка на диагоналите до бедрото AD е 2 см. Дължината на малката основа CD е:

а) 3,5 см; б) 4 см; в) 5 см; г) друг отговор.

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише.

Задачите се оценяват с по 3 точки.

13. Първият член на безкрайна геометрична прогресия с частно $|q| < 1$ е равен на 1 и сумата ѝ е S . Квадратите на членовете на тази прогресия образуват също безкрайно намаляваща прогресия. Да се намери сумата ѝ.

Отговор.....

14. Даден е равнобедреният триъгълник ABC ($AC = BC$) с бедро $AC = 4\sqrt{5}$ см и медиана $AD = 5$ см ($D \in BC$). Да се намери дължината на основата AB .

Отговор.....

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише подробно решението.

Задачите се оценяват с по 10 точки.

15. Намерете броя на целите стойности на a , за които $2,25 < \frac{2a^2 - a - 1}{a^2 - a} < 2,5$.

16. Да се реши системата
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x + y + xy = 23 \end{cases}$$

17. Периметърът на правоъгълния триъгълник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) е равен на $3 + \sqrt{3}$ см и $\angle BAC = 60^\circ$. Намерете радиуса на вписаната в триъгълника окръжност.

12 клас

Отговори: 1в; 2б; 3а; 4г -55; 5а; 6б; 7б; 8в; 9б; 10б; 11а; 12г -3см; 13 $\frac{S^2}{2S-1}$; 14 $AB = \sqrt{10}$

Решение:

15. ДС $a \neq 0$ и $a \neq 1$. След преобразуване се получава $2\frac{1}{4} < \frac{2(a-1)\left(a + \frac{1}{2}\right)}{a(a-1)} < 2\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} < \frac{2a+1}{a} < \frac{5}{2}$

$\frac{9}{4} < \frac{2a+1}{a} \Leftrightarrow a \in (0;4)$. $\frac{2a+1}{a} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow a \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty) \Rightarrow a \in (2;4) \Rightarrow a=3$. **Отг. 1**

16. Записваме системата във вида:
$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 34 \\ x+y+xy = 23 \end{cases}$$
. Полагаме
$$\begin{cases} x+y = u \\ xy = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 - 2v = 34 \\ u+v = 23 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = -10 \\ v_1 = 33 \end{cases} \begin{cases} u_1 = 8 \\ v_1 = 15 \end{cases}$. Първата система няма решение, а втората (3;5) и (5;3).

17. Означаваме страната $AC=b$. $AB=2b$ $BC = b\sqrt{3}$ $AB + AC + BC = b + 2b + b\sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$, $b=1$. От

$$\frac{r}{b-r} = \operatorname{tg}30^\circ \Rightarrow \frac{r}{1-r} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$