Секция "Изток" – СМБ
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 22.04.2012 г.
12 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Име ………………………………………….училище………………….град…………………

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. "Друг отговор" се приема за решение само ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

1. Дадена е окръжност с радиус $r = 3cm$. Дължината на дъгата на централен ъгъл с мярка $\frac{\pi}{5} rad$ е:

А) $\frac{\pi}{15} cm$; Б) $\frac{3\pi}{5} cm$; В) $\frac{6\pi}{5} cm$; Г) друг отговор.

2. Ако $0 < a < 1$, сравнете числата a, $a^{\frac{3}{4}}$ и $a^{\frac{2}{3}}$:

А) $a^{\frac{2}{3}} < a^{\frac{3}{4}} < a$; Б) $a^{\frac{3}{4}} < a^{\frac{2}{3}} < a$; В) $a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{3}{4}} > a$; Г) друг отговор

3. Ако $a < 0$ изразът $\sqrt{-2a^3} - \sqrt[3]{a^3} - \sqrt[4]{a^4}$ е тъждествено равен на:

А) $a\sqrt{2a}$; Б) $a(2 - \sqrt{2a})$; В) $-a\sqrt{-2a}$; Г) друг отговор.

4. Решенията на неравенството $(x^2 - 2)(x - 3)^2(x^2 - x + 2) \le 0$ са числата от интервала:

А) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; Б) $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$; В) $\left[\sqrt{2}; 3\right)$; Г) друг отговор.

5. Най- голямата стойност на израза $5 - 3\sin^2 2x$ е:

А) 5; Б) 8; В) 2; Г) друг отговор.

6. Софийското метро има 12 станции. По колко начина могат да слязат от метрото трима ученика, ако всеки двама слизат на различни станции?

А) 220; Б) 1320; В) 33; Г) друг отговор.

7. Най- голямата стойност на функцията $f(x) = \frac{2}{x^2 - x + 1}$ в интервала $\left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right]$ е:

А) $\frac{2}{3 - \sqrt{2}}$; Б) $\frac{3}{8}$; В) $\frac{3 - \sqrt{2}}{2}$; Г) друг отговор.

8. В окръжност с радиус $R = \frac{25}{8}$ е вписан равнобедрен $\angle ABC$ (AC=BC) в който $\sin\angle ABC$=0,8. Основата AB на ΔABC е равна на:

А) $3cm$; Б) $4cm$; В) $6cm$; Г) друг отговор.

9. Даден е успоредник $ABCD$ в който $AD = 8cm$, $\angle BAD$=120^0 и $\angle BAC$=30^0. Диагоналът AC е равен на:

А) $12cm$; Б) $4\sqrt{6}\,cm$; В) $8\sqrt{3}\,cm$; Г) друг отговор.

10. Коренът на уравнението $10 - x = -3\sqrt{x}$ е:

А) 15; Б) 12; В) 20; Г) друг отговор.

11. Медианите към катетите на правоъгълен триъгълник са равни на $\sqrt{87}$ и $\sqrt{93}$. Дължината на хипотенузата е:

А) 6; Б) 10; В) 12; Г) друг отговор.

12. На страната BC на правоъгълника $ABCD$ е взета точка F така, че ΔABF е равнобедрен. Ако $BC = \sqrt{2}$, то разстоянието от точката D до правата AF е:

А) 1; Б) $1,5$; В) 2; Г) друг отговор.

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише.
Задачите се оценяват с 3 точки

13. От 5 чифта маратонки с различни номера са взети по случаен начин две маратонки. Да се намери вероятността двете маратонки да са с един и същ номер.

Отговор:. . . . .

14. Даден е ромб $ABCD$ с диагонал $AC = 8cm$ и $\cos\angle BAD$=0,28. Да се намери страната на ромба.

Отговор:. . . . .

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише подробно решението.

Задачите се оценяват с по 10 точки.

15. В ΔABC е вписана окръжнос с радиус $r = 3cm$ и е описана окръжност с радиус $R = 6cm$. Да се намери лицето на триъгълника, ако $BC = 6\sqrt{3}\,cm$.

16. Дадена е геометричната прогресия $\{b_n\}$ с частно q. Да се намери q ако $b_1 b_9 = 2304$ и $b_4 + b_6 = 96$.

17. Върховете A, B и C на изпъкналия четириъгълника $ABCD$ лежат на окръжност (k) с радиус $R = 5$. Да се намери лицето на четириъгълника, ако $AB = BC = 8$ и $AD = DC = 6$.

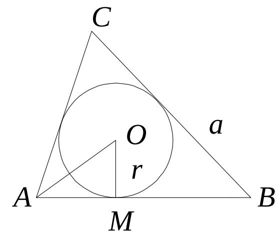
Отговори

1. б). 2. в). 3. в). 4. г $\left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]\cup\{3\}$). 5. а). 6. б). 7. г. $2\frac{2}{3}$). 8. в). 9. в). 10. г. 25). 11. в). 12.а). 13 1/9 **14**. 5см

15 . $27\sqrt{3}\,cm^2$ или $21\sqrt{3}\,cm^2$. 16 . $q=\pm 1$. 17 . 48 .

Решения

15. От $\Delta ABC \Rightarrow \sin\angle BAC = \frac{BC}{2R} = \frac{6\sqrt{3}}{2.6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогава $\angle BAC$=60^0или 120^0.



1. Ако $\angle BAC$=60^0 . От правоъгълния ΔAMO в който AM=p–a и $\angle MAO$=30^0, получаваме

$\frac{p-b}{r} = \cot g 30^o$, $p-6\sqrt{3} = 3.\sqrt{3}$, $p = 9\sqrt{3}$. Тогава $S_{ABC} = p.r = 9\sqrt{3}.3 = 27\sqrt{3}$.

2. Ако $\angle BAC$=120^0. Аналогично получаваме, че $p = 7\sqrt{3}$ и $S_{ABC} = 7\sqrt{3}.3 = 21\sqrt{3}cm^2$

16. Изразяваме членовете b_4, b_6 и b_1 чрез b_1 и q. Тогава b_4= b_1q^3, b_6= b_1q^5 и b_9= b_1q^8. От условието получаваме системата. $\left|\begin{array}{l} b_1b_1q^8 = 2304 \\ b_1q^3 + b_1q^5 = 96 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b_1q^4 = \pm 48 \\ b_1q^3(1+q^2) = 96 \end{array}\right.$. Разделяме почленно второто уравнение на системата на първото и получаваме уравнението $\frac{1+q^2}{q} = \pm 2$, откъдето $q = \pm 1$.

17. Понеже ΔABC и ΔADC са равнобедрени, точките B и D лежат на диаметъра на окръжността (k). От $AB^2 + AD^2 = 64 + 36 = 100 = (2R)^2$ $BC^2 + CD^2 = (2R)^2$ следва, че $\angle DAB$=$\angle DCB$=90^0. Тогава точката D лежи на (k). Правоъгълните триъгълници ABD и BCD са еднакви. Тогава S_{ABCD}=2.S_{ABD}= $2.\frac{AB.AD}{2} = 8.6 = 48$.