

СМБ – Секция “Изток”  
**ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 24.04.2010**  
7 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент : Всяка задача от 1 до 20 има само един правилен отговор от четири възможни (отбелязани с а), б), в), г) ) . За задачи 21,22 и 23 трябва да бъдат записани само отговорите, а задачи 24 и 25 трябва да бъдат подробно решени. Задачите от 1 до 5 се оценяват с по 1 точка; задачи от 6 до 15 – с по 2 точки; задачи от 16 до 20 – с по три точки; задачи 21, 22 и 23 – с по 5 точки; задачи 24 и 25 – с по 10 точки.

Неправилни решения и задачи без отговор се оценяват с 0 точки.

Организаторите Ви пожелават успех !

Име.....училище.....град.....

1. Да се приведе в нормален вид израза  $(x + y).x - (x^2y + xy^2) : (-x) - 2xy$  :

- а)  $x + y$                       б)  $x^2 + 1$                       в)  $x + y^2$                       г)  $x^2 + y^2$

2. При коя стойност на  $a$  нормалния многочлен, тъждествен на  $(x^2 + x - 1)(x - a)$  не съдържа  $x^2$  ?

- а) 0                      б) 1                      в) -1                      г) 2

3. Всички решения на неравенството  $5 - x \leq 0$  могат да се запишат във вида:

- а)  $x \in (-\infty; 5]$                       б)  $x \in (-\infty; -5)$                       в)  $x \in [5; +\infty)$                       г)  $x \in (5; +\infty)$

4. Два триъгълника са ВИНАГИ еднакви, когато имат равни:

- а) по два ъгъла                      б) по три ъгъла                      в) по две страни и ъгъл                      г) по три страни

5. Кое от посочените числа НЕ Е решение на неравенството  $\frac{x-4}{5} - \frac{3-x}{-2} < 1$ .

- а) 3                      б) 1                      в) 0                      г) - 2

6. Даден е многочленът  $4x^2 + 4xy + y^2 - 4$ . Кой от посочените изрази е негов множител?

- а)  $2x + y + 4$                       б)  $2x + y - 2$                       в)  $2x - y + 2$                       г) 2

7. В  $\triangle ABC$  точка  $P \in AC$ ,  $AB = BP = PC$  и  $\angle PBC = 38^\circ$ . Намерете  $\angle ABC$ .

- а)  $66^\circ$                       б)  $82^\circ$                       в)  $104^\circ$                       г)  $36^\circ$

8. Кое е вярното твърдение?

- а)  $(-2)^3 < -2^5$                       б)  $10\% \text{ от } 5 > 5\% \text{ от } 10$                       в)  $|5 - 8| - |-5 - 8| = -10$                       г)  $0 > |-1|$

9. Симетралата на страната АВ в правоъгълния  $\triangle ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) пресича ВС в точка Р, така че  $AC = CP$ .  $\angle ABC$  е равен на:

- а)  $30^\circ$                       б)  $20^\circ$                       в)  $22^\circ 30'$                       г)  $15^\circ$

10. Кои са решенията на уравнението  $x^{12} - x^8 - x^4 + 1 = 0$ .

- а) 1 и 2                      б) - 1 и 1                      в) - 1                      г) 1

11. Да се намери броят на целите стойности на параметъра  $a$ , за които уравненията  $ax^2 + 2a + 3 = 0$  и  $x^2 - x + 2 = (1 - x)^2$  са равносилни.

- а) 0                      б) 1                      в) 2                      г) 4

12. Външните ъгли на триъгълник се отнасят както 4 : 3 : 2. Най-големият вътрешен ъгъл на триъгълника е равен на:

- а)  $80^\circ$                       б)  $90^\circ$                       в)  $100^\circ$                       г)  $110^\circ$

13. Множеството на решенията на неравенството  $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$  е:

- а)  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$                       б)  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$                       в)  $\frac{1}{2}$                       г)  $(-\infty, +\infty)$

14. Даден е  $\triangle ABC$ . Ъглополовящите на външните ъгли при върховете А и В се пресичат в точка D. Да се намери големината на  $\angle ADB$ , ако  $\angle ACB = 80^\circ$ .

- а)  $50^\circ$                       б)  $100^\circ$                       в)  $40^\circ$                       г)  $80^\circ$

15. Намерете решението на уравнението  $|6x - 2| = |5x - 9|$ .

- а) - 7                      б) 1 и 7                      в) 2 и - 1                      г) - 7 и 1

16. Дължината, широчината и височината на правоъгълен паралелепипед са съответно 4 см,  $\pi$  см и 9 см, а числата, изразяващи обема на паралелепипеда и повърхнината на дадено кълбо са равни. Тогава обемите на паралелепипеда и кълбото се отнасят както:

- а) 3 : 1                                      б) 2 : 1                                      в) 1 : 1                                      г) 1 : 2

17. На празното място в редицата от уравнения  $3x + 2 = 5$ ,  $4x + 3 = 7$ ,  $7x + 3 = 10$ , ..... може да бъде поставено уравнението:

- а)  $3x + 5 = 10$                               б)  $6x + 5 = 11$                               в)  $5x + 6 = 13$                               г)  $8x + 2 = 12$

18. Върху страната АВ на равностранния триъгълник ABC са взети точки Р и Q, такива че  $AP = BQ$  и

$AP < \frac{AB}{2}$ . Ако правата CP дели  $\angle ACQ$  в отношение 1 : 2, то  $\angle AQC$  е равен на:

- а)  $30^\circ$                                       б)  $45^\circ$                                       в)  $60^\circ$                                       г)  $75^\circ$

19. Ако  $a > b$ , кое от неравенствата е винаги вярно?

- а)  $a + 6 > b - 6$                               б)  $-3a > -3b$                               в)  $a - 1 > b + 1$                               г)  $2a - 1 > 2b$

20. Моторна лодка тръгва от речно пристанище и изминава разстоянието от А до В и обратно за 5 часа. Намерете разстоянието между А и В, ако скоростта на лодката в спокойни води е 15 км/ч, а на течението – 3 км/ч.

- а) 45 км                                      б) 36 км                                      в) 28 км                                      г) 60 км

21. Даден е триъгълник ABC, в който  $AC > BC$ . Симетралата на АВ пресича AC в точка Р. Ако  $BP \perp AC$  и  $2PC = BC$ , намерете ъглите на триъгълника.

22. От два града, разстоянието между които е 135 км, тръгват едновременно два автомобила. Единият автомобил се движи с 72 км/ч, а другият – с 63 км/ч. След колко часа разстоянието между тях ще бъде 45 км?

23. За коя стойност на параметъра  $k$  уравнението  $11k - x = 1 - kx$  е равносилно на уравнението

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{5x^2 - 16x}{6} = 2 + \frac{\left(\frac{1}{2} - 2x\right)^2 + \frac{1}{8}}{3}$$

24. Да се докаже, че средното аритметично на третите степени на три последователни цели числа се дели на три (средното аритметично на три числа е равно на техния сбор, разделен на три).

25. Даден е триъгълник  $\triangle ABC$  с височина CH ( $H \in AB$ ) и ъглополовяща AP ( $P \in BC$ ), пресичащи се в точка D.

- а) намерете големината на  $\angle BAC$ , ако  $\angle ABC = 50^\circ$  и  $CD = CP$  ;  
б) ако  $AP = CH$  и права през D, успоредна на АВ пресича AC в точка Q като  $QC = 2 \cdot QA$ , докажете, че  $\triangle ABC$  е равностранен.

**Решение на 24 задача:**

Нека числата са  $n-1$ ,  $n$  и  $n+1$ .

Тогава

$$\begin{aligned} (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 &= \\ &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = \\ &= 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2) \end{aligned} \quad \text{3 т.}$$

Средното аритметично на трите числа е равно на:

$$\frac{(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3}{3} = \frac{3n(n^2 + 2)}{3} = n(n^2 + 2) \quad \text{2 т.}$$

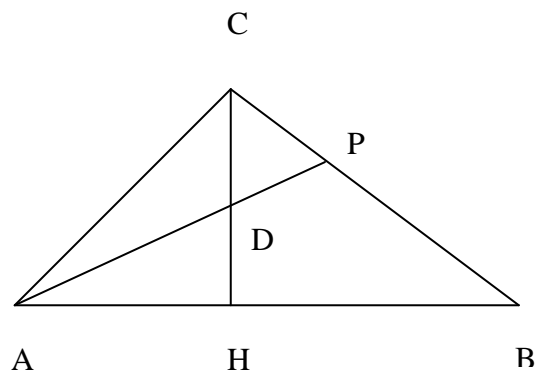
Трябва да се докаже, че  $n(n^2 + 2)$  се дели на 3, но  $n(n^2 + 2) = n(n^2 + 2 - 1 + 1) = n(n^2 - 1 + 3) = n(n^2 - 1) + 3n = (n-1)n(n+1) + 3n$ ;  $(n-1)n(n+1)$  се дели на 3 и  $3n$  се дели на 3  $\Rightarrow$  средното аритметично на числата  $n-1$ ,  $n$  и  $n+1$  се дели на 3. 5 т.

**10 точки**

**Решение на 25 задача:**

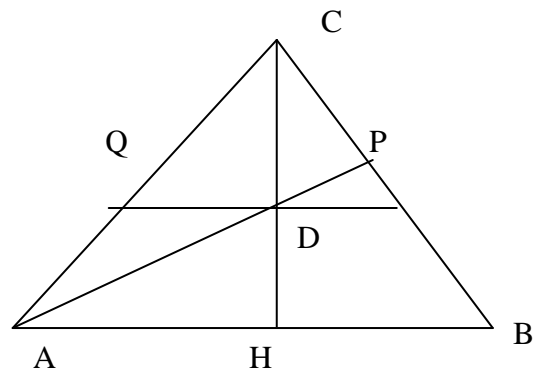
а)  $\angle ABC = 50^\circ \Rightarrow \angle BCH = 40^\circ$   
 $CD=CP \Rightarrow \angle CDP = \angle DPC = 70^\circ$   
 $\angle ADH = \angle CDP = 70^\circ \Rightarrow \angle HAD = 20^\circ$   
 $\angle BAC = 2 \cdot \angle HAD = 40^\circ$

**4 точки**



б)

$AP = CH$        $QC = 2 \cdot QA$   
 $\angle CAP = \angle PAB$   
 $\angle HAD = \angle ADQ$   
 $\Rightarrow \triangle AQD$  ( $AQ = QD$ )  
 $\angle QDC = 90^\circ$      $QD \parallel AB$   
 $\triangle QDC$      $CQ = 2 \cdot QA = 2 \cdot QD \Rightarrow$   
 $\angle QCD = 30^\circ \Rightarrow$   
 $\angle CQD = \angle CAB = 60^\circ$



$\triangle ADC$  - равнобедрен  $\Rightarrow AD = DC$  (1)  $DH = DP$  (2)  $\angle ADH = \angle CDP$  - връхни (3)  $\Rightarrow \triangle AHD \cong \triangle PDC \Rightarrow \angle APC = 90^\circ \Rightarrow AP$  е височина и ъглополовяща  $\Rightarrow \triangle ABC$  е равнобедрен, но  $\angle CAB = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$  е равностранен.

**6 точки**

# О т г о в о р и

Име.....

Училище.....

град.....

Зад. №	отг.	отг.	отг.	отг.
1	а	б	в	г
2	а	б	в	г
3	а	б	в	г
4	а	б	в	г
5	а	б	в	г

Брой верни отговори.....5.....х 1 точка

Зад. №	отг.	отг.	отг.	отг.
6	а	б	в	г
7	а	б	в	г
8	а	б	в	г
9	а	б	в	г
10	а	б	в	г
11	а	б	в	г
12	а	б	в	г
13	а	б	в	г
14	а	б	в	г
15	а	б	в	г

Брой верни отговори.....10.....х 2 точки

Зад. №	отг.	отг.	отг.	отг.
16	а	б	в	г
17	а	б	в	г
18	а	б	в	г
19	а	б	в	г
20	а	б	в	г

Брой верни отговори.....5.....х 3 точки

Зад.№	Резултат	точки
21	45°,75°,60°	5
22	40 мин или 1 час и 20 мин	5
23	к = 3	5

Зад.№	точки
24	10
25	10

Общ брой точки

75

Проверил:.....

# Б л а н к а   з а   о т г о в о р и

Име..... Училище..... град.....

Зад. №	отг.	отг.	отг.	отг.
1	а	б	в	г
2	а	б	в	г
3	а	б	в	г
4	а	б	в	г
5	а	б	в	г

Брой верни отговори.....х 1 точка

Зад. №	отг.	отг.	отг.	отг.
6	а	б	в	г
7	а	б	в	г
8	а	б	в	г
9	а	б	в	г
10	а	б	в	г
11	а	б	в	г
12	а	б	в	г
13	а	б	в	г
14	а	б	в	г
15	а	б	в	г

Брой верни отговори.....х 2 точки

Зад. №	отг.	отг.	отг.	отг.
16	а	б	в	г
17	а	б	в	г
18	а	б	в	г
19	а	б	в	г
20	а	б	в	г

Брой верни отговори.....х 3 точки

Зад.№	Резултат	точки
21		
22		
23		

Зад.№	точки
24	
25	

Общ брой точки

Проверил:.....