СМБ – Секция "Изток"

ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 26. 04.2009

9 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент : Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор . "Друг отговор" се приема за решение само при отбелязан верен резултат . 15 тестови задачи са разделени на групи по трудности : от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки ; от 6 до 10- с по 5 точки и от 11 до 15 – с по 7 точки. Организаторите Ви пожелават успех !

Име…………………………………………………..училище………………..град…………..

1. Изразът $(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)$ е тъждествен на :
   а) x^4-1; б) x^4-5x^2+4; в) $2x^4-5x^2-4$; г) друг отговор.
2. Корените на уравнението $\frac{x}{x-3}+\frac{9}{x^2-9x+18}=\frac{2}{x-6}$ са:
   а) 5 и 3; б) 3; в) 5; г) друг отговор.
3. Трапец е вписан и описан във и около окръжност. Ако едно от бедрата му е 10, а основите се отнасят както 2:3, то голямата основа е :
   а) 6; б) 10; в) 12; г) друг отговор.
4. В ΔABC точка G е медицентър, а M, K и P са среди на отсечките AG, BG и CG. Ако периметърът на MKP е 8, то периметърът на ABC е:
   а) 16; б) 12; в) 24; г) друг отговор.
5. Четириъгълник $ABCD$ е вписан в окръжност с диаметър AC. Точка B е среда на дъгата AC, а дъгите AD и DC се отнасят, както 1:2. Острият ъгъл между диагоналите AC и BD е:
   а) 45^0; б) 60^0; в) 75^0; г) 80^0.
6. Стойностите на x, за които изразът $\frac{1}{x-3}+\sqrt{\frac{2-x}{x^2-4x+4}}$ е дефиниран са:
   а) $x \neq 2;3$; б) $x<2$; в) $x \leq 2$; г) $x \geq 2$.
7. Нека $a \neq 0$, x_1 и x_2 са корени на $x^2-8x+2a=0$, стойността на $x_1^2+x_2^2$ е:
   а) $\frac{4}{a}$; б) 64; в) $\frac{64}{a^2}-4a^2$; г) друг отговор.
8. Корените на уравнението $(x^2-81)\sqrt{2-x}=0$ са:
   а) ±9 и 2; б) 9 и 2; в) – 9 и 2; г) друг отговор.
9. В четириъгълника $ABCD$ точките M, N, P и Q са среди на страните AB, BC, CD и DA. Ако $MN = 2$, $MQ = 5$ и $AC \perp BD$, то лицето на $ABCD$ е:
   а) 10; б) 15; в) 40; г) друг отговор.
10. *А*, *Б*, *В*, *Г* са четири града, като всеки е свързан с останалите с директен път. Временно директният път между *А* и *Г* е затворен. Броят на различните маршрути от *А* до *Г*, като през всеки град се минава не повече от един път, по време на ремонта е:
    а) 2; б) 3; в) 4; г) 8.
11. Реалните числа x и y са решения на системата $\begin{vmatrix} x+y=7 \\ xy=4 \end{vmatrix}$, стойността на x^3y+xy^3 е:
    а) $\frac{7+\sqrt{33}}{2}$; б) $\frac{7-\sqrt{33}}{2}$; в) $33\sqrt{33}$; г) друг отговор.
12. Броят на целите стойности на n, за които $\frac{1}{n-1}+\frac{4n-9}{n^2+3n-4}$ приема цели стойности е:
    а) 3; б) 4; в) безброй много; г) няма такива.
13. В ΔABC точка M е среда на BC, а K и P са от AB и $AP = PK = KB$. Ако лицето на KPM е S, то лицето на ΔABC е:
    а) $4S$; б) $6S$; в) $8S$; г) друг отговор.
14. Броят на диагоналите на изпъкнал 2009-ъгълник е:
    а) 2009; б) 2009.1003; в) 2009.2008; г) друг отговор.
15. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2+2x-7=0$, то стойността на израза $x_1^{2011}+2x_1^{2010}-7x_1^{2009}+x_2^{2011}+2x_2^{2010}-7x_2^{2009}$ е:
    а) $(-1\pm\sqrt{8})^{2009}$; б) $(-1+\sqrt{8})^{2009}+(-1-\sqrt{8})^{2009}$; в) 2009; г) друг отговор.

Отговори и упътвания 9 клас :

1б); 2в); 3в); 4а); 5в); 6б); 7г) 64-4*a*; 8в); 9г) 20; 10в); 11г); 164; 12а); 13б); 14б); 15г) 0

Зад 2: Корени са 5 и 3, но само 5 е от дефиниционната област.

Зад 3: От свойството на вписан и на описан трапец $\Rightarrow$ трапеца е равнобедрен и сборът на основите ($2x$ и $3x$) е равен на сбора от бедрата. $2x + 3x = 20 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$ голямата основа е 12.

Зад 4: $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ с коефициент 1:2.

Зад 7: От формулите на Виет и от преобразуванието $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 64 - 4a$.

Зад 8: От очевидните корени ± 9 и 2, числото 9 не е от дефиниционната област.

Зад 9: MN и QP са средни отсечки в ABC и $ADC \Rightarrow MN$ и QP са успоредни и равни на половината от AC $\Rightarrow$ $MNPQ$ е успоредник и $AC = 2MN = 4$. Аналогично $BD = 2QM = 10$. $\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \dfrac{AC.BO}{2} + \dfrac{AC.DO}{2} = \dfrac{AC(BO+DO)}{2} = \dfrac{AC.BD}{2} = 20$.

Зад. 11: $x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = xy\left[(x+y)^2 - 2xy\right] = 4.(49-8) = 164$.

Зад 12: След преобразувания получаваме $\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{4n-9}{n^2+3n-4} = \dfrac{5}{n+4} \Rightarrow$ ($\boldsymbol{n}$ + 4) трябва де е целочислен делител на 5 $\Rightarrow$($\boldsymbol{n}$ + 4)$\in \{-5;-1;1;5\} \Rightarrow n \in \{-9;-5;-3;1\}$, но $n \neq 1 \Rightarrow n \in \{-9;-5;-3\}$.

Зад 13: $S_{KBM} = S_{PKM} = S$ (обща височина). Аналогично получаваме $S_{PCM} = S_{PMB} = 2S$ и $S_{ABC} : S_{PBC} = AB : BP = 3:2 \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{3}{2} S_{PBC} = \dfrac{3}{2}.4S = 6S$.

Зад 14: Нека разгледаме всички отсечки с краища $\boldsymbol{n}$ точки в общо положение. Първия край избираме по $\boldsymbol{n}$ различни начина, а втория по $\boldsymbol{n-1}$ (от останалите точки) $\Rightarrow$ общия брой отсечки е $\dfrac{n(n-1)}{2}$ от тях изваждаме $\boldsymbol{n}$ отсечки (страни) и за диагоналите остават $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Зад 15: Преобразуваме изразът $x_1^{2011} + 2x_1^{2010} - 7x_1^{2009} + x_2^{2011} + 2x_2^{2010} - 7x_2^{2009} =$
$= x_1^{2009}(x_1^2 + 2x_1 - 7) + x_2^{2009}(x_2^2 + 2x_2 - 7) = x_1^{2009}.0 + x_2^{2009}.0 = 0$

Стефчо Наков
Монтана