

Секция “Изток” – СМБ
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 12.12.2009 г.

9 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. “Друг отговор” се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име.....училище.....град.....

Зад 1. В координатна система са зададени правите $y = x + 5$ и $y = 2x + b$, които се пресичат в точка от абсцисната ос. Стойността на b е равна на:

- а) 10; б) 5; в) -5 ; г) друг отговор.

Зад 2. Допустимите стойности на израза $\frac{1}{a+2} - \left(\frac{1}{a^2+1} - \frac{1}{a-1} \right) : \frac{a-2}{a-1}$ са:

- а) $a \neq \pm 1, \pm 2$; б) $a \neq \pm 1, -2$; в) $a \neq 1, -2$; г) друг отговор.

Зад 3. В ΔABC AM е медиана, G е медицентър. Отношението на лицата $S_{GCM} : S_{ABM}$ е:

- а) 1:1; б) 1:2; в) 1:3; г) друг отговор.

Зад 4. Броят на различните реални корени на уравнението $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$ е:

- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

Зад 5. Сумата на всички цели числа в интервала $[-\sqrt{1850}; \sqrt{2009}]$ е равна на:

- а) 44; б) 159; в) 2009; г) друг отговор.

Зад 6. Допирните точки на вписаната окръжност със страните на триъгълник я разделят на дъги в отношение 5:6:7. Най-големият ъгъл на триъгълника е равен на е:

- а) 60^0 ; б) 70^0 ; в) 80^0 ; г) друг отговор.

Зад 7. Корените на уравнението $x^2 - ax - 2009 = 0$ са цели числа. Броят на различните стойности на a е:

- а) 6; б) 4; в) 2; г) друг отговор.

Зад 8. В ΔABC точката H е ортоцентър. Отношението на ъглите $\angle ABH : \angle BCH : \angle CAH = 2:3:4$. Най-малкият ъгъл на триъгълника е равен на :

- а) 40^0 ; б) 50^0 ; в) 60^0 ; г) друг отговор.

Зад 9. Реалното число $a \in (0;1)$ е такова, че $a + \frac{1}{a} = 11$. Стойността на $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$:

- а) $\sqrt{11}$; б) $-\sqrt{11}$; в) 3; г) друг отговор.

Зад 10. $ABCD$ ($AC \perp BD$, $AC \cap BD = O$) е трапец, вписан в окръжност. Средната основа е равна на 12, а основите се отнасят така: $AB : CD = 2:1$.

а) Намерете лицата на $ABCD$, AOD и BOC ;

б) Ако $AD = p$, изразете чрез p дължината на отсечка HM , където $OH \perp AD$, $H \in AD$, а M е среда на BC .

Отговори 9 клас

1.А); 2.Г $a \neq 1, \pm 2$; 3.В); 4.В); 5.А); 6.В); 7.А) 8.Б); 9.Г(-3).

Упътвания и решения:

Зад 1. Първата права пресича Ox в точка $(-5; 0)$, замествайки във втората $\Rightarrow b = 10$.

Зад 3. От свойството на медицентъра $S_{CGM} : S_{AMC} = GM : AM = 1 : 3$, но $S_{ABM} = S_{AMC}$.

Зад 4. Ако положим $t = x^2 - 2x$, получаваме уравнението $t^2 - 2t - 3 = 0$ с корени 3 и -1. От тук се получават уравненията $x^2 - 2x + 1 = 0$ с двоен корен 1 и $x^2 - 2x - 3 = 0$ с корени 3 и -1.

Зад 5. Целите числа в интервала са $\{-43, -42, \dots, 42, 43, 44\}$. Очевидно сумата на всички, без последното, е нула.

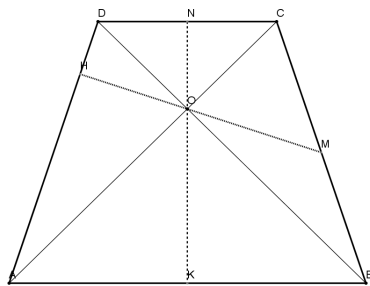
Зад 6. От отношението на дъгите и ъгловата мярка на цялата окръжност \Rightarrow

$5x + 6x + 7x = 360^\circ \Rightarrow x = 20^\circ \Rightarrow$ дъгите и съответните им централни ъгли са $100^\circ, 120^\circ$ и 140° . От получените четириъгълници с върхове връх на триъгълника, две допирни точки и центъра на окръжността \Rightarrow ъглите на триъгълника са $80^\circ, 60^\circ$ и 40° .

Зад 7. От формулите на Виет $x_1 x_2 = -2009$. $2009 = 7 \cdot 7 \cdot 49 \Rightarrow$ възможните целочислени двойки са $(1, -2009), (7, -287), (49, -41), (41, -49), (287, -7)$ и $(2009, -1)$. Стойностите на $a = x_1 + x_2$ са $6 (\pm 2008, \pm 280, \pm 8)$.

Зад 8. При стандартни означения за ъглите на ΔABC от получените правоъгълни триъгълници от височините $\Rightarrow \alpha = 90^\circ - 2x, \beta = 90^\circ - 3x, \gamma = 90^\circ - 4x$. От сбора на ъглите в $\Delta ABC \Rightarrow 2x + 3x + 4x = 90^\circ \Rightarrow x = 10^\circ \Rightarrow$ ъглите на ΔABC са $70^\circ, 60^\circ$ и 50° .

Зад 9. Нека $A = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow A^2 = a - 2 + \frac{1}{a} = 11 - 2 = 9 \Rightarrow A = \pm 3$, но $A < 0 \Rightarrow A = -3$.



Зад 10. а) От окръжността трапеца е равнобедрен (1т.), от отношението и средната основа $AB = 16, CD = 8$ (1т.) OK и ON са височини в равнобедрени правоъгълни триъгълници \Rightarrow медиани \Rightarrow са съответно 8 и 4, а цялата височина $KN = 12$ (2т.)

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{16+8}{2} \cdot 12 = 144$ (1т.) $\Delta AOD \cong \Delta BOC \Rightarrow$ имат равни лица

(2т.) $S = \frac{S_{ABCD} - S_{ABO} - S_{COD}}{2} = \left(144 - \frac{16 \cdot 8}{2} - \frac{8 \cdot 4}{2} \right) \frac{1}{2} = 32$ (1т.)

Забележка: $S_{\Delta AOD} = S_{\Delta BOC} = \sqrt{S_{\Delta AOB} \cdot S_{\Delta COD}}$ за всеки трапец.

б) $\angle CBO = \angle BOM$ (OM медиана в правоъгълен триъгълник), $\angle CBO = \angle DAO$ (вписани ъгли или от еднакви триъгълници), $\angle DAO = \angle DOH = 90^\circ - \angle AOH \Rightarrow$

$\angle DOH = \angle BOM \Rightarrow M, O$ и H лежат на една права, (3т.) $OM = \frac{BC}{2} = \frac{p}{2}$, (1т.) от лицето

$S_{AOD} = \frac{AD \cdot OH}{2} = 32 \Rightarrow OH = \frac{64}{p}$ (2т.) $\Rightarrow MH = \frac{p}{2} + \frac{64}{p} = \frac{p^2 + 64}{2p}$ (1т.)

Стефчо Након
Монтана