Международно състезание “Европейско Кенгуру”

21 март 2009 г.

ТЕМА за 11 и 12 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. В един аквариум има 200 рибки. Точно 1% от тях са сини, а всички останали са жълти. Колко жълти рибки трябва да бъдат извадени от аквариума, за да станат сините рибки 2% от останалите?

A) 2 **B)** 4 **C)** 20 **D)** 50 **E)** 100

2. Кое от посочените числа е най-голямо?

A) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ **B)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ **D)** $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ **E)** $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

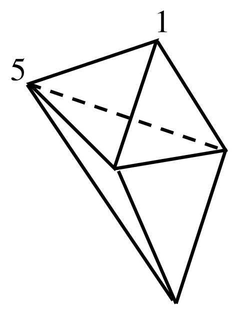
3. За колко различни цели положителни числа n числото n^2+n е просто?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** за краен брой, но повече от 2 **E)** за безкраен брой

4. Мария, Вяра и Оля отишли в сладкарница и всяка от тях купила по три сока, два сладоледа и пет бонбона. Кое от посочените числа може да показва общата им сметка в левове?

A) 15,92 **B)** 15,82 **C)** 15,72 **D)** 15,62 **E)** 15,52

5. Показаното тяло е образувано от 6 триъгълника. Във всеки от 5-те върха на тялото е поставено по едно число така, че сумата на числата в трите върха на всеки от 6-те триъгълника е една и съща. Намерете сумата на числата в 5-те върха на тялото, ако две от числата са 1 и 5, както е показано.



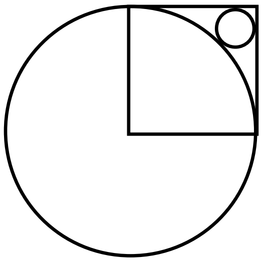
A) 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 17 **E)** 24

6. Окръжностите $k_1(O_1;13)$ и $k_2(O_2;15)$ се пресичат в точките P и Q. Ако дължината на отсечката PQ е 24, то дължината на отсечката O_1O_2 може да бъде равна на:

A) 2 **B)** 5 **C)** 9 **D)** 4 **E)** друг отговор

7. В една кутия са поставени 2 бели, 3 червени и 4 сини чорапа. Любка знае, че една трета от чорапите в кутията имат дупки, но не знае цвета на скъсаните чорапи. Тя вади един по един чорапи от кутията, докато не получи здрав чифт едноцветни чорапи. Колко най-малко чорапа трябва да извади Любка от кутията, за да е сигурна, че ще се случи исканото от нея?

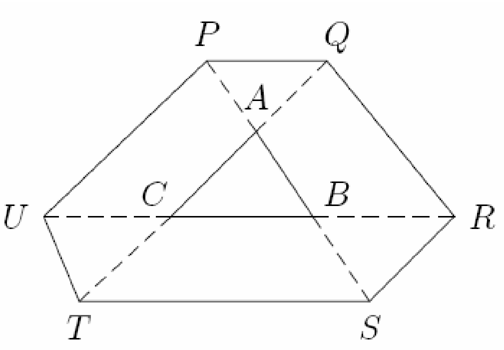
A) 2 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8



8. Ако квадратът на чертежа има страна с дължина 1, то радиусът на по-малката окръжност е равен на:

A) $\sqrt{2}-1$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$



9. Страните на ΔABC с лице 1 са продължени в двете посоки така, че $PA = AB = BS$, $TC = CA = AQ$ и $UC = CB = BR$. Да се намери лицето на шестоъгълника $PQRSTU$.

A) 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 13

E) не може да се определи от даденото

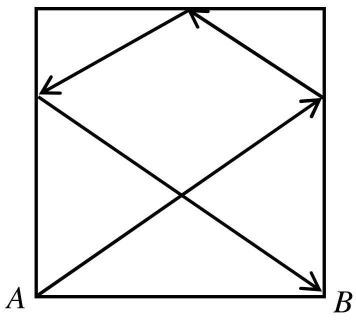
10. Квадратчетата от таблицата на чертежа трябва да бъдат оцветени в цветовете A, B, C и D така, че съседните квадратчета да не са едноцветни (съседни са всеки две квадратчета, които имат общ връх). Някои от квадратчетата са оцветени, както е показано. В какви цветове може да бъде оцветено затъмненото квадратче?

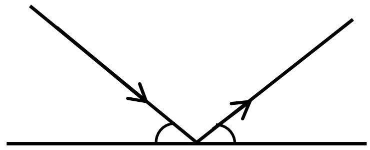
A	B			
C	D			
		B		
B				

A) A или B **B)** само C **C)** само D **D)** C или D

E) в кой да е от четирите цвята

11. От ъгъла A на билярдна маса с квадратна форма е изстреляна топка. След като се удря три пъти в стените на масата, както е показано на чертежа, топката отива в ъгъл B. Ако страната на квадрата е 2 метра, колко метра е изминала топката? (Не забравяйте, че топката отскача под същия ъгъл, под който се удря, както е показано на дясната фигура).





A) 7 **B)** $2\sqrt{13}$ **C)** 8 **D)** $4\sqrt{3}$ **E)** $2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

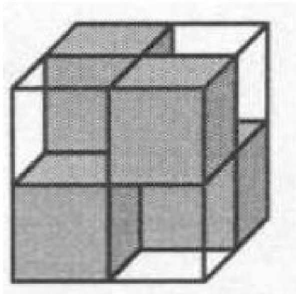
12. Две хиляди и девет кенгурчета, всяко от които е или светло, или тъмно, се сравняват по височина. Оказало се, че едно светло кенгурче е по-високо от точно 8 тъмни кенгурчета, друго светло кенгурче е по-високо от точно 9 тъмни кенгурчета, трето светло кенгурче е по-високо от точно 10 тъмни кенгурчета, и така нататък, има светло кенгурче, което е по-високо от всички тъмни кенгурчета. Колко са светлите кенгурчета?

A) 1000 **B)** 1001 **C)** 1002 **D)** 1003 **E)** описаното е невъзможно

13. На един остров живеят само рицари и лъжци. Рицарите винаги казват истината, а лъжците винаги лъжат. Двадесет и пет жители на острова се наредили на опашка един след друг. Всеки, освен първия, твърдял, че стоящият пред него е лъжец, а първият твърдял, че всички след него са лъжци. Колко са лъжците на опашката?

A) 13 **B)** 12 **C)** 0 **D)** 24 **E)** друг отговор

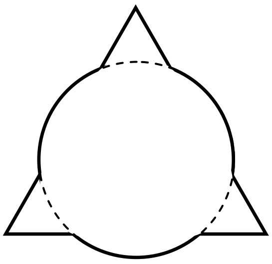
14. На фигурата е показан куб с размери $2\times2\times2$, образуван от 4 прозрачни кубчета с размери $1\times1\times1$ и 4 непрозрачни кубчета с размери $1\times1\times1$. Малките кубчета са подредени така, че големият куб е непрозрачен, тоест не може да се вижда през него нито отгоре надолу, нито отпред назад, нито отляво надясно. Колко най-малко непрозрачни кубчета $1\times1\times1$ трябва да се използват, за да се направи непрозрачен куб с размери $3\times3\times3$?



A) 6 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 18

15. Коя е цифрата на единиците на стойността на израза $1^2 - 2^2 + \ldots - 2008^2 + 2009^2$?

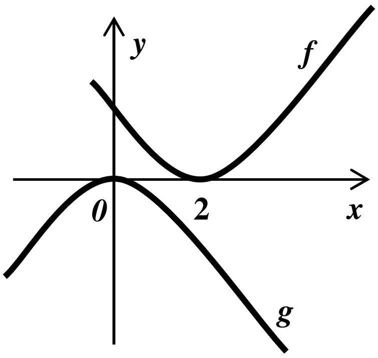
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5



16. Нека застъпим равностранен триъгълник със страна 3 и окръжност с радиус 1 така, че центровете им да съвпадат, както е показано на чертежа. Намерете обиколката на получената фигура.

A) $3+2\pi$ **B)** $6+\pi$ **C)** $9+\dfrac{\pi}{3}$ **D)** 3π **E)** $9+\pi$

17. На чертежа са построени графиките на функциите $f(x)$ и $g(x)$ в една и съща координатна система. Коя е вярната зависимост за двете функции?



A) $g(x) = f(x+2)$ **B)** $g(x-2) = -f(x)$

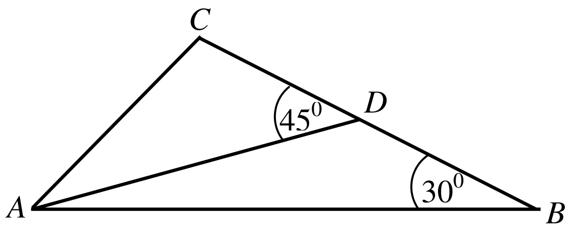
C) $g(x) = -f(-x+2)$ **D)** $g(-x) = -f(-x+2)$

E) $g(2-x) = -f(x)$

18. В Олимпиада по математика участвали 100 ученици, които трябвало да решат 4 задачи. Деветдесет ученици решили първата задача, 85 решили втората, 80 – третата и 70 – четвъртата. Какъв е възможно най-малкият брой участници, решили всички задачи?

A) 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 30

19. Даден е ΔABC с $\angle ABC = 30^0$. Да се намери мярката на $\angle CAD$, ако $\angle ADC = 45^0$ и D е средата на страната BC.



A) 45^0 **B)** 30^0 **C)** 25^0 **D)** 20^0 **E)** 15^0

20. В квадратната таблица 3×3 от чертежа са записани реални числа така, че сумата на числата във всеки ред, всяка колона и двата диагонала е една и съща (т.е. квадратът е магически). На колко е равно числото a?

a		
		47
	63	

A) 16 **B)** 51 **C)** 54 **D)** 55 **E)** 110

21. Намерете броя на 10-цифрените числа, чиито цифри са 1, 2 или 3, като всеки две съседни цифри се различават точно с единица.

A) 16 **B)** 32 **C)** 64 **D)** 80 **E)** 100

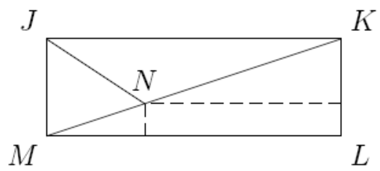
22. Бегачите A и B обикалят стадион, като всеки от тях тича с постоянна скорост. Бегачът A тича по-бързо от B и обикаля стадиона за 3 минути. A и B тръгват едновременно и след 8 минути A настига B за пръв път. За колко време B прави една обиколка на стадиона?
A) 6 мин. **B)** 8 мин. **C)** 4 мин. и 30 сек. **D)** 4 мин. и 48 сек. **E)** 4 мин. и 20 сек.

23. Нека Z е броят на 8-цифрените естествени числа с различни цифри, в които не участва 0. Колко е броят на числата в Z, които се делят на 9?
A) $\frac{Z}{8}$ **B)** $\frac{Z}{3}$ **C)** $\frac{Z}{9}$ **D)** $\frac{8Z}{9}$ **E)** $\frac{7Z}{8}$

24. За колко цели положителни числа $n \geq 3$ съществува изпъкнал $n-$ъгълник, чиито ъгли се отнасят както $1:2:\ldots:n$?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** повече от 5

25. В Олимпиада по математика участвали 55 ученици. При проверката на решенията журито отбелязвало с „+" всяка вярно решена задача, с „– " всяка погрешно решена задача и с „0" всяка задача, която съответният ученик не е решавал. Накрая се оказало, че няма две писмени работи, в които броят на „+" и на „– " е един и същ. Какъв е възможно най-малкият брой задачи, дадени на Олимпиадата?
A) 6 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

26. В правоъгълника $MLKJ$ от чертежа ъглополовящата на $\angle KJM$ пресича диагонала MK в точката N. Разстоянията от N до правите LM и KL са съответно 1 и 8. Намерете дължината на отсечката LM.



A) $8+2\sqrt{2}$ **B)** $11-\sqrt{2}$ **C)** 10 **D)** $8+3\sqrt{2}$ **E)** $11+\frac{\sqrt{2}}{2}$

27. Реалните числа a, b и c са такива, че $k=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$. Колко са възможните стойности на k?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** безброй много

28. Числата 1, 2, 3, …, 99 са разпределени в n групи така, че всяко число е в точно една група, във всяка група има поне две числа и ако две числа са в една и съща група, то сборът им не се дели на 3. Намерете най-малкото n, за което това е възможно.
A) 3 **B)** 9 **C)** 33 **D)** 34 **E)** 66

29. Светла и трите й сестри си купили билети за театър в 4-местна ложа и всяка получила билет със съответен номер. Светла и две от сестрите й отишли по-рано в театъра и седнали на три от четирите места в ложата по случаен начин. Когато се появила четвъртата сестра, тя поискала да седне на своето място. В случай че мястото й е било заето, седящата на него сестра го освобождавала, като отивала на собственото си място. В случай че и това място е било заето, седящата на него сестра също го освобождавала, като и тя отивала на собственото си място, и т.н. Каква е вероятността Светла да се е преместила при идването на четвъртата сестра?
A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

30. Редицата от цели числа a_n е дефинирана чрез равенствата $a_0=1,\ a_1=2,\ a_{n+2}=a_n+\left(a_{n+1}\right)^2$ при $n \geq 0$. Намерете остатъка при делението на числото a_{2009} на 7.
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 5 **E)** 6