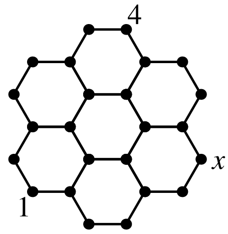
Международно състезание "Европейско Кенгуру"

19 март 2011 г.

ТЕМА за 11 и 12 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Върху всяка от точките на фигурата трябва да се запише по едно число така, че сумата от числата в краищата на всяка отсечка да е една и съща. Две от числата вече са написани. На колко е равно числото x?



A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** не може да се определи

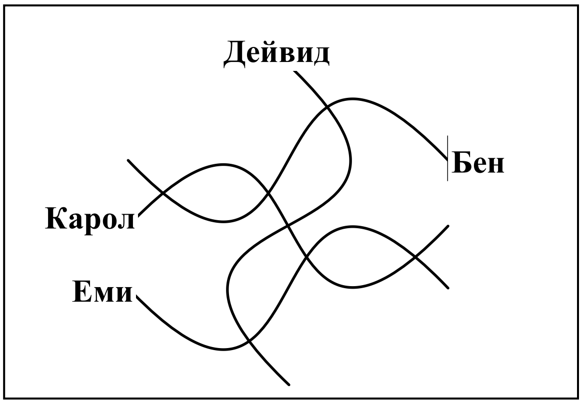
2. Трима спортисти – Михаел, Фернандо и Себастиан – участвали в автомобилно рали. В началото Михаел повел, Фернандо бил втори и Себастиан – трети. По време на ралито Михаел и Фернандо разменили местата си 9 пъти, Фернандо и Себастиан – 10 пъти, а Михаел и Себастиан – 11 пъти. В какъв ред спортистите са завършили състезанието?

A) Михаел, Фернандо, Себастиан **B)** Фернандо, Себастиан, Михаел
C) Себастиан, Михаел, Фернандо **D)** Себастиан, Фернандо, Михаел
E) Фернандо, Михаел, Себастиан

3. Ако $2^x = 15$ и $15^y = 32$, то xy е равно на:

A) 5 **B)** $\log_2 15 + \log_{15} 32$ **C)** $\log_2 47$ **D)** 7 **E)** $\sqrt{47}$

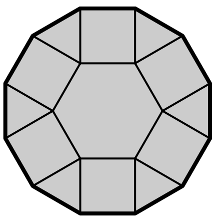
4. По време на бурно морско пътешествие Жени се опитала да направи скица на селището, в което живее. Тя успяла да начертае четирите улици, на които се намират къщите на нейните приятели Бен, Дейвид, Карол и Еми, както и всичките седем пресичания на тези улици. В действителност три от улиците са абсолютно прави, а четвъртата се нарича "Кривата улица". Кой живее на "Кривата улица"?



A) Еми **B)** Бен **C)** Карол **D)** Дейвид
E) не може да се определи от скицата

5. Всички четирицифрени естествени числа със сума от цифрите 4 са записани в намаляващ ред. На кое място се намира числото 2011?

A) на 6-то **B)** на 7-мо **C)** на 8-мо **D)** на 9-то **E)** на 10-то

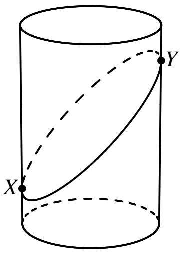


6. Фигурата на чертежа се състои от правилен шестоъгълник със страна 1, шест триъгълника и шест квадрата. Колко е обиколката на фигурата?

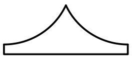
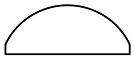
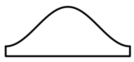
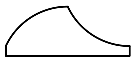
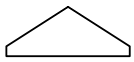
A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B)** $6\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **C)** 12 **D)** $6+3\sqrt{2}$ **E)** 9

7. Андрей написал на дъската нечетните числа от 1 до 2011 включително, а Боби изтрил кратните на 3. Колко числа са останали на дъската?

A) 335 **B)** 336 **C)** 671 **D)** 1005 **E)** 1006



8. Правоъгълен лист хартия е увит около цилиндър и е направен равнинен разрез през цилиндъра и хартията. Разрезът минава през точките X и Y от чертежа. След това долната част на хартията е разгъната. Коя от посочените фигури може да е разгънатата долна част на хартията?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

9. За четириъгълника $PQRS$ е изпълнено $\angle PSR = \angle PQR = 90°$, $PS = SR$, $ST \perp PQ$ ($T \in PQ$) и $ST = 5$. Лицето на четириъгълника е равно на:

A) 20 **B)** 22,5 **C)** 25 **D)** 27,5 **E)** 30

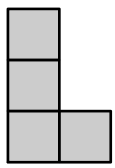
10. Макс и Хюго хвърлят шепа зарове, за да определят кой от двамата трябва да скочи пръв в студеното езеро. Ако не се падне нито една шестица, пръв трябва да е Макс, а ако се падне точно една шестица, пръв трябва да е Хюго. Ако се паднат повече от една шестица, скачането се отлага за друг ден. Колко зарове трябва да хвърлят Макс и Хюго, че шансът на всеки от тях да скочи пръв в езерото да е един и същ?

A) 3 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 17

11. С помощта на три правоъгълника, поставени плътно един до друг без застъпване, трябва да се получи по-голям правоъгълник. Единият от дадените правоъгълници има размери 7 на 11, а вторият има размери 4 на 8. Третият правоъгълник е избран с възможно най-голямо лице. На колко е равно това лице?

A) 11 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 56 **E)** 77

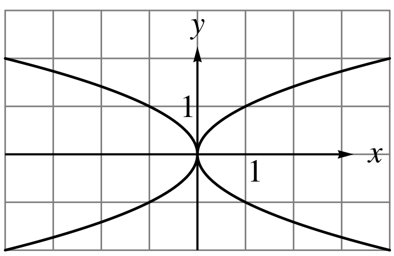
12. Показаната $L-$образна фигура е съставена от 4 квадратчета. По колко начина може да се добави още едно квадратче така, че получената фигура да има ос на симетрия?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 6

13. 48 момчета били на ски-училище. Шестима от тях имали точно по един брат измежду останалите, деветима имали точно по двама братя измежду останалите и четирима имали точно по трима братя измежду останалите. Другите деца нямали братя измежду останалите. От колко семейства са били децата от ски-училището?

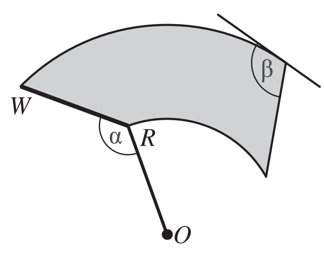
A) 19 **B)** 25 **C)** 31 **D)** 36 **E)** 48



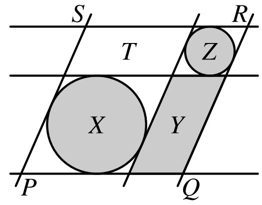
14. Колко от графиките на функциите $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = \sqrt{|x|}$ и $y = -\sqrt{|x|}$ са включени на чертежа?

A) нито една **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** всичките 8

15. Чистачката на задното стъкло на автомобил има чистеща част RW и свързваща част OR, които са еднакво дълги и образуват фиксиран ъгъл α, както е показано на чертежа. При въртенето на чистачката около центъра O чистещата част почиства част от стъклото (затъмнената част на чертежа). Намерете ъгъла β между крайното дясно положение на чистещата част и допирателната към кривата (описвана от т. W) в крайното положение на W.



A) $\dfrac{3\pi - \alpha}{2}$ **B)** $\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ **C)** $\dfrac{3\pi}{2} - \alpha$ **D)** $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$ **E)** $\pi + \dfrac{\alpha}{2}$



16. Трите хоризонтални прави на чертежа са успоредни. Трите наклонени прави също са успоредни. Всяка от окръжностите се допира до четири от правите. Лицата на затъмнените фигури от чертежа са означени съответно с X, Y и Z, както е показано, а W е лицето на успоредника $PQRS$. Ицо иска да намери лицето T на успоредника от чертежа. Колко най-малко от лицата X, Y, Z и W са му необходими, за да пресметне T?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** T не може да се изрази чрез X, Y, Z и W

17. Правилните тетраедри $ABCD$ и $BCDE$ имат обща стена BCD. Нека X е точката, в която правата DE пресича равнината (ABC). Кое от посочените твърдения е вярното?

A) X не съществува, защото DE е успоредна на (ABC) **B)** $X \in \Delta ABC$

C) X и A са от една и съща страна на правата BC, но X е извън ΔABC

D) BC пресича отсечката AX във вътрешна точка и $BC \perp AX$ **E)** друг отговор

18. Шестоъгълникът $PQRSTU$ със страни $PQ = 4$, $QR = 5$, $RS = 6$, $ST = 7$ и $TU = 8$ е описан около окръжност. Да се намери дължината на страната UP.

A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** не може да се определи

19. Да се намери сумата на всички цели положителни числа x, по-малки от 100, за всяко от които числото $x^2 - 81$ е кратно на 100.

A) 200 **B)** 100 **C)** 90 **D)** 81 **E)** 50

20. Братята Андрей и Иван отговорили вярно на въпроса колко са членовете на шахматния им клуб. Андрей казал: "Всички членове на клуба са момчета, освен петима, които са момичета." Иван добавил: "Всяка група от шестима членове на клуба включва най-малко четири момичета." Колко са членовете на клуба?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 12 **E)** 18

21. В кутия за лотария са поставени топки и върху всяка от топките е записано по едно цяло положително число. Всички записани числа са различни. Върху 30 от топките е записано число, кратно на 6, върху 20 от топките е записано число, кратно на 7, а върху точно 10 от топките е записано число, кратно на 42. Намерете възможно най-малкия брой топки в кутията.

A) 30 **B)** 40 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 60

22. Дадени са двете безкрайни аритметични прогресии 5; 20; 35;… и 35; 61; 87;… Намерете броя на различните безкрайни аритметични прогресии от цели положителни числа, всяка от които съдържа всички членове на двете дадени прогресии.

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 26 **E)** безброй много

23. Редицата функции $f_1(x), f_2(x), \ldots,$ удовлетворява двете условия: $f_1(x) = x$ и $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)}$ за всяко $n \geq 1$. Да се пресметне $f_{2011}(2011)$.

A) 2011 **B)** $-\dfrac{1}{2010}$ **C)** $\dfrac{2010}{2011}$ **D)** 1 **E)** -2011

24. Кутия съдържа някакъв брой червени и някакъв брой зелени топки. По случаен начин се избират две топки от кутията. Вероятността избраните топки да са с еднакъв цвят е $\dfrac{1}{2}$. Кое от посочените числа е възможно да показва общия брой на топките в кутията?

A) 81 **B)** 101 **C)** 1000 **D)** 2011 **E)** 10001

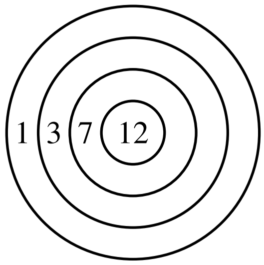
25. Самолетна компания не таксува багажа на даден пътник, ако този багаж не надхвърля определено тегло. За всеки килограм над определеното тегло се заплаща определена такса. Багажът на г-н и г-жа Трип бил общо 60 кг и те платили 3 евро, като всеки от тях платил част от тази сума. Багажът на г-н Уондър бил също 60 кг, но той платил за него 10,5 евро. Да се намери максималното тегло на багажа на един пътник, за който пътникът не заплаща такса.

A) 10 кг **B)** 18 кг **C)** 20 кг **D)** 25 кг **E)** 39 кг

26. В израза $\dfrac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}$ различните букви отговарят на различни ненулеви цифри, а еднаквите букви отговарят на еднакви цифри. Известно е, че стойността на израза е цяло положително число. Коя е най-малката възможна стойност на израза при тези условия?

(**A**) 1 **B**) 2 **C**) 3 **D**) 5 **E**) 7

27. Робин Худ изстрелял три стрели по мишената, показана на чертежа. Той уцелил при трите изстрела и получил съответни точки съгласно показаните числа в различните кръгове. Колко различни резултата могат да се получат след сумиране на точките?



A) 13 **B)** 17 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 21

28. Нека a, b и c са такива цели положителни числа, че $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. Какъв най-малък брой положителни делители може да има числото abc (включително 1 и abc)?

A) 30 **B)** 49 **C)** 60 **D)** 77 **E)** 1596

29. Двадесет различни цели положителни числа са записани в клетките на правоъгълна таблица с размери 4×5 (във всяка клетка по едно число). Всеки две съседни числа (числата в клетки с обща страна) имат общ делител, по-голям от 1. Ако n е най-голямото число в таблицата, да се намери минималната стойност на n.

A) 21 **B)** 24 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 40

30. Намерете броя на 4-елементните множества от различни ръбове на даден куб, за които произволни два ръба в множеството нямат общ връх.

A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 18