Международно състезание “Европейско Кенгуру”

19 март 2011 г.

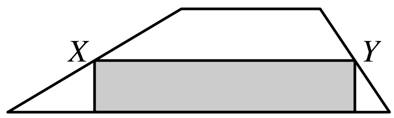
ТЕМА за 9 и 10 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Пешеходна пътека тип зебра се състои от бели и черни ивици, които се редуват, като белите ивици са 8 на брой. Ако пътеката започва и завършва с бяла ивица, а широчината на всяка ивица е 50 *cm*, то дължината на пътеката е:

A) $7\,m$ **B)** $7{,}5\,m$ **C)** $8\,m$ **D)** $8{,}5\,m$ **E)** $9\,m$

2. Точките X и Y са среди на бедрата на трапеца от чертежа. Затъмненият четириъгълник е правоъгълник с лице 13 cm^2. Да се намери лицето на трапеца в кв. сантиметри.

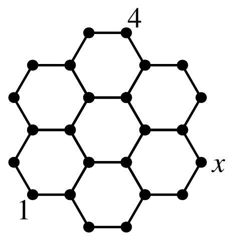


A) 24 **B)** 25 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 28

3. Ако $P = 2.3 + 3.4 + 4.5$, $Q = 2^2 + 3^2 + 4^2$ и $R = 1.2 + 2.3 + 3.4$, кое от посочените твърдения е вярното?

A) $Q < P < R$ **B)** $P < Q = R$ **C)** $P < Q < R$ **D)** $R < Q < P$ **E)** $Q = P < R$

4. Върху всяка от точките на фигурата трябва да се запише по едно число така, че сумата от числата в краищата на всяка отсечка да е една и съща. Две от числата са вече написани. На колко е равно числото x?



A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** не може да се определи

5. Мартин си спомня, че е разделил числото 2011 с някакво естсетвено число и е получил остатък 1011. За съжаление той не може да си спомни делителя. Със сигурност:

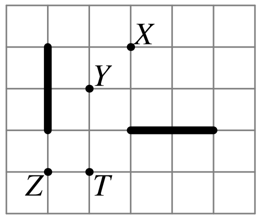
A) делителят е четен **B)** делителят е нечетен **C)** делителят е кратен на 5 **D)** делителят е съставно число **E)** Мартин е допуснал грешка при делението

6. Правоъгълна апликация с лице 360 cm^2 е покрита с цели квадратни плочки с едни и същи размери. Дължината на апликацията е 24 *cm*, а широчината ѝ е 5 плочки. Намерете лицето на една плочка.

A) $1\,cm^2$ **B)** $4\,cm^2$ **C)** $9\,cm^2$ **D)** $16\,cm^2$ **E)** $25\,cm^2$

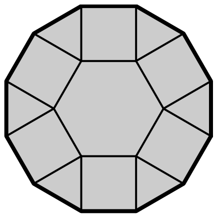
7. Всички четирицифрени естествени числа със сума от цифрите 4 са записани в нарастващ ред. На кое място се намира числото 2011?

A) на 14-то **B)** на 13-то **C)** на 8-мо **D)** на 9-то **E)** на 12-то



8. Всяка от двете отсечки на чертежа е получена от другата чрез ротация. Коя от точките X, Y, Z и T е център на такава ротация?

A) само X **B)** само X и Z **C)** само X и T **D)** само T **E)** X, Y, Z и T



9. Фигурата на чертежа се състои от правилен шестоъгълник със страна 1, шест триъгълника и шест квадрата. Колко е обиколката на фигурата?

A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B)** $6\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **C)** 12 **D)** $6+3\sqrt{2}$ **E)** 9

10. Три еднакви зарчета са поставени едно върху друго така, че сумата на точките върху допиращите се стени е винаги равна на 5. Колко точки има върху горната стена на най-горното зарче, ако върху лявата стена на най-долното зарче има 1 точка? (Зарчетата са истински, т.е. сумата от точките на срещуположните стени е 7.)

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

11. В един месец има 5 понеделника, 5 вторника и 5 среди, а в предния месец има само 4 недели. Кое от посочените твърдения за следващия месец е вярното?

A) в месеца има точно 4 петъка **B)** в месеца има точно 4 съботи
C) в месеца има 5 недели **D)** в месеца има 5 среди **E)** такава ситуация е невъзможна

12. Трима спортисти – Михаел, Фернандо и Себастиан – участвали в автомобилно рали. В началото Михаел повел, Фернандо бил втори и Себастиан – трети. По време на ралито Михаел и Фернандо разменили местата си 9 пъти, Фернандо и Себастиан – 10 пъти, а Михаел и Себастиан – 11 пъти. В какъв ред спортистите са завършили състезанието?

A) Михаел, Фернандо, Себастиан **B)** Фернандо, Себастиан, Михаел
C) Себастиан, Михаел, Фернандо **D)** Себастиан, Фернандо, Михаел
E) Фернандо, Михаел, Себастиан

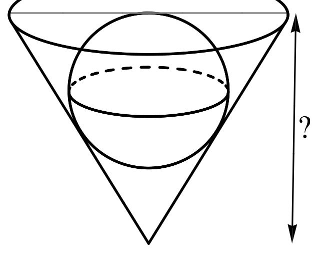
13. Ако $9^n+9^n+9^n=3^{2011}$, намерете стойността на n.

A) 1005 **B)** 1006 **C)** 2010 **D)** 2011 **E)** друг отговор

14. Дадени са два съда с формата на куб, първият със страна $a\,cm$, а вторият със страна $(a+10)\,cm$. По-големият съд е пълен с вода, а по-малкият е празен. По-малкият съд се напълва с вода от по-големия, при което в по-големия съд остават 271 литра вода. Колко литра са прелети в по-малкия съд?

A) 243 **B)** 512 **C)** 125 **D)** 1331 **E)** 729

15. Мраморно топче с радиус 15 е поставено в конусовиден съд, като се допира до основата му и до околната му повърхнина. Да се намери дълбочината на съда, ако равнината, прекарана през върха му и диаметър на основата му, отсича от него равностранен триъгълник.



A) $30\sqrt{2}$ **B)** $25\sqrt{3}$ **C)** 45 **D)** 60 **E)** $60(\sqrt{3}-1)$

16. Всички клетки на таблица 4×4 трябва да се оцветят в черно или червено. Броят на черните клетки във всеки ред и всеки стълб е означен с числата съответно вдясно на редовете и с числата съответно под стълбовете. Намерете броя на всички такива оцветявания.

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 9

				2
				0
				1
				1
2	0	1	1	

17. Намерете възможно най-големия брой последователни трицифрени числа, в записа на които участва поне една нечетна цифра.

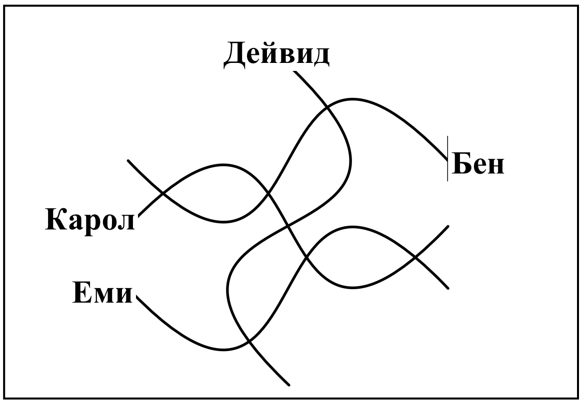
A) 10 **B)** 100 **C)** 110 **D)** 111 **E)** 221

18. Във всяка от клетките на таблица с 3 реда и 3 стълба трябва да се запише по едно цяло число така, че сумата на числата във всеки квадрат от таблицата с размери 2×2 да е равна на 10. Пет от клетките на таблицата са попълнени. Кое от посочените числа може да е равно на сумата на липсващите четири числа?

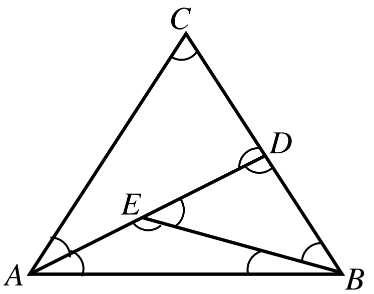
1		0
	2	
4		3

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** не може да се определи

19. По време на бурно морско пътешествие Жени се опитала да направи скица на селището, в което живее. Тя успяла да начертае четирите улици, на които се намират къщите на нейните приятели Бен, Дейвид, Карол и Еми, както и всичките седем пресичания на тези улици. В действителност три от улиците са абсолютно прави, а четвъртата се нарича "Кривата улица". Кой живее на "Кривата улица"?



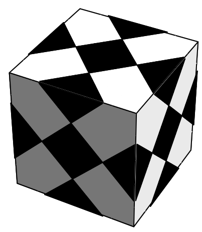
A) Еми **B)** Бен **C)** Карол **D)** Дейвид **E)** не може да се определи от скицата



20. Върху страната BC на ΔABC е взета вътрешна точка D, а върху отсечката AD – вътрешна точка E. Намерете възможно най-малкия брой различни стойности, които могат да приемат отбелязаните 9 ъгъла ABE, BAE, AEB, BED, EBD, EDB, ADC, CAD и ACD.

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

21. Даден е куб със страна 1 *dm*. От черна хартия са изрязани квадрати, с които са облепени стените на куба по показания начин и всички стени изглеждат по един и същ начин. Намерете лицето на черната част от повърхнината на куба.



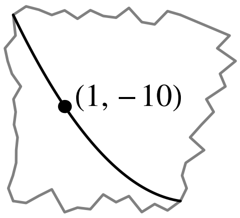
A) $37{,}5\,cm^2$ **B)** $150\ cm^2$ **C)** $225\ cm^2$ **D)** $300\ cm^2$ **E)** $375\ cm^2$

22. Едно петцифрено число е *хладно*, ако се записва с различни цифри и първата му цифра е равна на сумата от останалите четири. Намерете броя на хладните числа.

A) 72 **B)** 144 **C)** 168 **D)** 216 **E)** 288

23. Числата x и y са по-големи от 1. Коя от дробите е с най-голяма стойност?

A) $\dfrac{x}{y+1}$ **B)** $\dfrac{x}{y-1}$ **C)** $\dfrac{2x}{2y+1}$ **D)** $\dfrac{2x}{2y-1}$ **E)** $\dfrac{3x}{3y+1}$



24. В стандартна правоъгълна координатна система xOy е отбелязана точката $(1;-10)$ върху графиката на функцията $y=ax^2+bx+c$. След това координатните оси и почти цялата графика на функцията са изтрити, като остава изображението от чертежа. Кое от посочените твърдения може да бъде НЕВЯРНО?

A) $a>0$ **B)** $b<0$ **C)** $a+b+c<0$ **D)** $b^2>4ac$ **E)** $c<0$

25. Даден е ΔABC с медиана $CM=3$ ($M\in AB$). Външно за триъгълника са построени квадрати $CBDP$ и $ACQR$. Да се намери дължината на отсечката PQ.

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

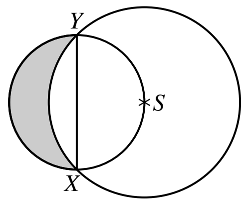
26. Намерете броя на наредените двойки естествени числа $(x;y)$, които удовлетворяват уравнението $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

27. За всяко естествено число $n\geq 2$ с $\langle n\rangle$ означаваме най-голямото просто число, което не надминава n. Намерете броя на целите положителни числа, които са решения на уравнението $\langle k+1\rangle+\langle k+2\rangle=\langle 2k+3\rangle$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

28. Две окръжности са разположени, както е показано. По-голямата е с център S и радиус r, а отсечката XY е диаметър на по-малката. Намерете лицето на затъмнената част.



A) $\dfrac{1}{6}\pi r^2$ **B)** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi r^2$ **C)** $\dfrac{1}{2}r^2$ **D)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}r^2$ **E)** друг отговор

29. Нека a, b и c са такива цели положителни числа, че $a^2=2b^3=3c^5$. Какъв най-малък брой положителни делители може да има числото abc (включително 1 и abc)?

A) 30 **B)** 49 **C)** 60 **D)** 77 **E)** 1596

30. За кои естествени числа n в интервала $0<n<9$ е възможно да се отбележат няколко клетки в таблица 5×5 така, че всяка подтаблица 3×3 да съдържа точно n от отбелязаните клетки?

A) 1 **B)** 1 и 2 **C)** 1, 2 и 3 **D)** 1, 2, 7 и 8 **E)** всички