

# Международно състезание "Европейско Кенгуру"

20 март 2010 г.

## ТЕМА за 11 и 12 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. **ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути.** Пожелаваме Ви успех!

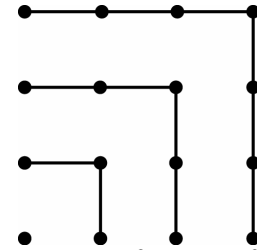
1. Ако сумата на числата във всеки от двата реда е една и съща, кое число трябва да стои вместо звездичката \*?

- A) 1010      B) 1020      C) 1910  
D) 1990      E) 2000

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	*

2. От фигурата се вижда, че  $1+3+5+7=4 \times 4$ . Намерете стойността на  $1+3+5+7+9+11+13+15+17$ .

- A)  $14 \times 14$       B)  $9 \times 9$       C)  $4 \times 4 \times 4$   
D)  $16 \times 16$       E)  $4 \times 9$



3. Два съда с формата на куб имат лица на една от стените си съответно  $1 \text{ dm}^2$  и  $4 \text{ dm}^2$ . По-големият куб трябва да се напълни с изворна вода, като се използва по-малкият. Колко пъти трябва да се напълни малкият куб с вода от извора?

- A) 2 пъти      B) 4 пъти      C) 6 пъти      D) 8 пъти      E) 16 пъти

4. Колко четирицифрени числа, записващи се само с нечетни цифри, са кратни на 5?

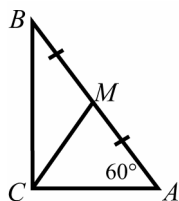
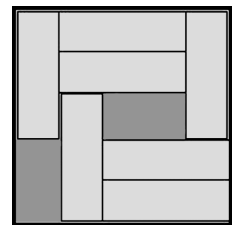
- A) 900      B) 625      C) 250      D) 125      E) 100

5. Управителят на една фирма казал: „Всеки от нашите служители е поне на 25 години.“ Оказало се, че неговото твърдение не е вярно. Това означава, че:

- A) всички служители във фирмата са точно на 25 години;  
B) всички служители във фирмата са поне на 26 години;  
C) никой от служителите във фирмата не е навършил 25 години;  
D) някой служител във фирмата е на по-малко от 25 години;  
E) някой служител във фирмата е точно на 26 години.

6. В показаната кутия са поставени седем еднакви плочки с размери  $3 \times 1$ . С плъзгане без застъпване на някои от плочките във вътрешността на кутията трябва да се освободи място за още една такава плочка. Колко най-малко плочки трябва да се преместят?

- A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) исканото е невъзможно



7. Триъгълникът  $ABC$  е правоъгълен, точката  $M$  е средата на хипотенузата му  $AB$  и  $\angle A = 60^\circ$ . Мярката на  $\angle BMC$  е:

- A)  $105^\circ$       B)  $108^\circ$       C)  $110^\circ$       D)  $120^\circ$       E)  $125^\circ$

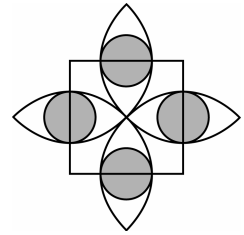
8. Кое от посочените числа може да показва броя на ръбовете на призма?

- A) 100      B) 200      C) 2008      D) 2009      E) 2010

9. За колко двуцифрени числа  $\overline{xy}$  е изпълнено условието  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$ ?

- A) 1                      B) 2                      C) 6                      D) 32                      E) нито едно

10. Дължината на страната на квадрата от чертежа е равна на 2, всички полуокръжности минават през центъра му, а техните центрове са върхове на квадрата. Затъмнените кръгове се допират до полуокръжностите и центровете им лежат върху страните на квадрата. Да се намери сумата от лицата на затъмнените кръгове.

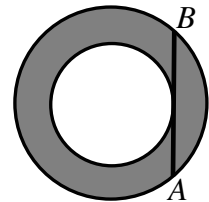


- A)  $4(3-2\sqrt{2})\pi$       B)  $\sqrt{2}\pi$       C)  $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$       D)  $\pi$       E)  $\frac{1}{4}\pi$

11. Числата  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt[3]{7}$ ,  $\sqrt[4]{7}$  в посочения ред са последователни членове на геометрична прогресия. Следващият член на тази прогресия е равен на:

- A)  $\sqrt[5]{7}$                       B)  $\sqrt[12]{7}$                       C)  $\sqrt[3]{7}$                       D)  $\sqrt[10]{7}$                       E) 1

12. Хордата  $AB$  от чертежа се допира до по-малката от двете концентрични окръжности. Ако  $AB = 16$ , на колко е равно лицето на затъмнената фигура?

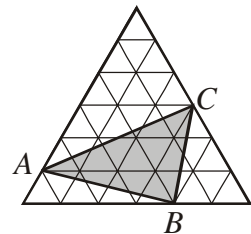


- A)  $32\pi$                       B)  $63\pi$                       C)  $64\pi$                       D)  $32\pi^2$   
E) лицето зависи от радиусите на окръжностите

13. За целите числа  $x$  и  $y$  е вярно равенството  $2x = 5y$ . Точно едно от посочените числа може да бъде равно на  $x + y$ . Кое е то?

- A) 2011                      B) 2010                      C) 2009                      D) 2008                      E) 2007

14. Големият равностранен триъгълник е съставен от 36 по-малки равностранни триъгълника, всеки от които е с лице  $1 \text{ cm}^2$ . Намерете лицето на  $\triangle ABC$ .



- A)  $11 \text{ cm}^2$       B)  $12 \text{ cm}^2$       C)  $13 \text{ cm}^2$       D)  $14 \text{ cm}^2$       E)  $15 \text{ cm}^2$

15. В една чанта има топки от три цвята – червен, син и зелен, като от всеки цвят има поне по една топка. Известно е, че както и да се извадят пет топки от чантата, измежду извадените има поне две червени и поне три с един и същи цвят. Колко сини топки има в чантата?

- A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) не е възможно да се определи

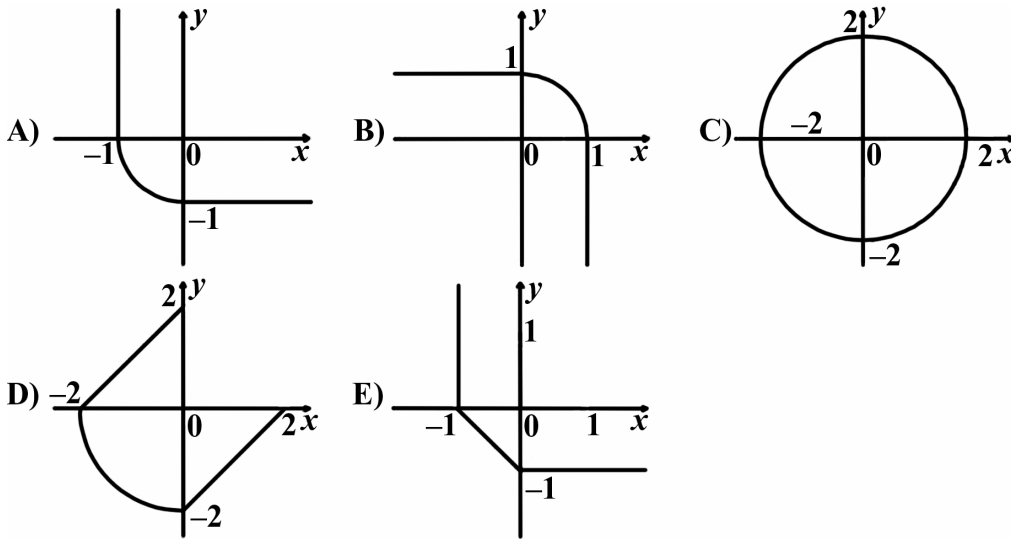
16. Колко правоъгълни триъгълника могат да се получат, като се използват някои три от върховете на правилен 14-ъгълник?

- A) 42                      B) 84                      C) 88                      D) 98                      E) 168

17. Най-малката стойност на израза  $\frac{x^3y + xy^3}{x^4 + y^4}$ , в който  $x$  и  $y$  са различни от нула реални числа, е:

- A)  $-2$                       B)  $-\sqrt{2}$                       C)  $-1$                       D)  $-\frac{1}{2}$                       E)  $-\frac{1}{3}$

18. Коя от графиките изобразява решенията на уравнението  $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$  ?



19. Ако  $a$  и  $b$  са рационални числа, за които е вярно равенството  $a\sqrt{2} + b + 2\sqrt{2} + 1 = a$ , то произведението  $a \cdot b$  е равно на:

- A) 4                      B) 8                      C) 6                      D) -6                      E) -8

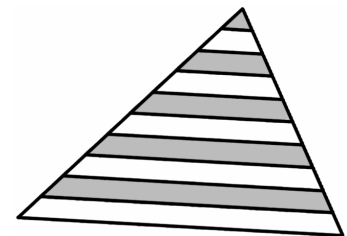
20. Редицата  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  се задава с равенствата  $x_1 = \sqrt{2}$ ,  $x_{k+1} = \frac{x_k - 1}{x_k + 1}$ ,  $k \geq 1$ . На колко е

равно  $x_{2010}$  ?

- A)  $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$               B)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$               C)  $\frac{\sqrt{2} + 1}{1 - \sqrt{2}}$               D)  $\sqrt{2}$               E)  $2010\sqrt{2}$

21. Прави, успоредни на едната страна на дадения триъгълник, разделят другите му две страни на 10 равни части. Колко процента от лицето на триъгълника е затъмнената част?

- A) 42,5%              B) 45%              C) 46%              D) 47,5%              E) 50%



22. Сто атлети взели участие в надбягване, като никои двама не финиширали с едно и също време. След състезанието всеки участник бил попитан на кое място е завършил и всички отговорили с някакво естествено число между 1 и 100 включително. Сумата на дадените 100 отговора се оказала 4000. Какъв е възможният най-малък брой на неверните отговори?

- A) 9                      B) 10                      C) 11                      D) 12                      E) 13

23. Зар се хвърля три пъти. Ако числото, паднало се при третото хвърляне, е равно на сумата от числата, паднали се при първите две хвърляния, каква е вероятността поне при едно от трите хвърляния да се падне 2?

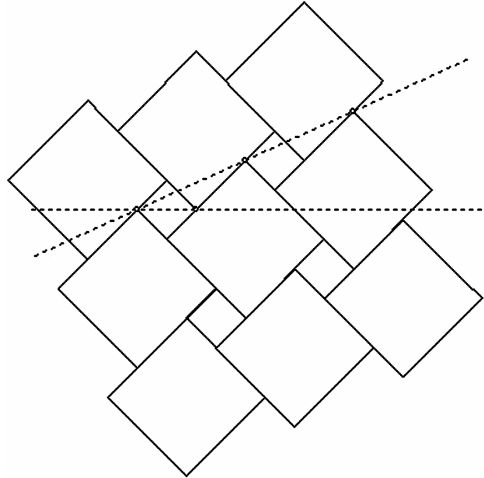
- A)  $\frac{1}{6}$                       B)  $\frac{91}{216}$                       C)  $\frac{1}{2}$                       D)  $\frac{8}{15}$                       E)  $\frac{7}{12}$

24. Показаният баркод е съставен от алтернативно сменящи се черни и бели ивици, като първата и последната са черни. Всяка от ивиците (черна и бяла) е с ширина 1 или 2, а ширината на баркода е равна на 12. Намерете броя на различните баркодове с тези свойства, ако разчитането става винаги отляво надясно.



- A) 24                      B) 132                      C) 66                      D) 12                      E) 116

25. Стена е облепена с квадратни плочки от два вида, както е показано на фигурата. Дължината на страната на по-голямата плочка е  $a$ , а тази на по-малката е  $b$ . Ако двете прави, отбелязани с пунктирани линии, сключват ъгъл  $30^\circ$ , то отношението  $a : b$  е равно на:



- A)  $(2\sqrt{3}):1$       B)  $(2+\sqrt{3}):1$       C)  $(3+\sqrt{2}):1$       D)  $(3\sqrt{2}):1$       E) 2:1

26. Естествените числа от 1 до 10 включително са записани на черната дъска по 10 пъти всяко. Учениците от един клас играят следната игра: някой ученик изтрива две от числата на дъската и вместо тях записва сумата им, намалена с 1. След това друг ученик изтрива две от числата на дъската и вместо тях записва сумата им, намалена с 1 и т.н. Играта завършва, когато на дъската остане точно едно число. Оставащото на дъската число е:

- A) по-малко от 440      B) 451      C) 460      D) 488      E) по-голямо от 500

27. Стойността на израза  $\frac{(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)\dots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$  е равна на:

- A)  $2^{2048}$       B)  $2^{4096}$       C)  $3^{2048}$       D)  $3^{4096}$       E)  $3^{2048} + 2^{2048}$

28. Квадратният корен  $\sqrt{0,\underbrace{44\dots4}_{100}}$  е записан като безкрайна десетична дроб. Коя е стотната цифра след десетичната запетая на тази дроб?

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 6

29. Функцията  $f(x)$  е дефинирана за всяко положително реално число  $x$  и приема реални стойности. Известно е, че за всяко  $x > 0$  е вярно равенството  $2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$ . На колко е равно  $f(6)$ ?

- A) 993      B) 1      C) 2009      D) 1013      E) 923

30. Катетите на правоъгълен триъгълник имат дължини  $a$  и  $b$  и върху тях са взети съответно точките  $Q$  и  $P$ . Нека  $H$  и  $K$  са петите на перпендикулярите към хипотенузата, спуснати съответно от  $Q$  и  $P$ . Да се намери най-малката стойност на сумата  $KP + PQ + QH$ .

- A)  $a+b$       B)  $\frac{2ab}{a+b}$       C)  $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$       D)  $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$       E)  $\frac{(a+b)^2}{2ab}$