

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ  
СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

---

**Математически турнир "Иван Салабашев"**

6 декември 2008 г.

**Тема за 10., 11., 12. клас**  
(време за работа 120 минути)

След всяка от задачи от 1 до 6 има 4 отговора, само един от които е верен. Решенията на задачи 7 и 8 трябва да бъдат подробно обяснени. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 6 се присъждат по 3 точки. За вярно решение на всяка от задачи 7 и 8 се присъждат по 6 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници може да намерите на адрес <http://www.math.bas.bg/salabashev08/>.

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Правите  $y = x$  и  $y = -kx$  пресичат графиката на параболата  $y = x^2$  в точки  $A$  и  $B$ , различни от началото  $O$  на координатната система. Ако  $\sphericalangle OAB = 90^\circ$ , то  $k$  е равно на:

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

2. Дадени са 3 бели, 3 зелени и 4 червени топки. Вероятността в проценти произволно избрани три от тях да са разноцветни е равна на:

А) 10; Б) 20; В) 25; Г) 30.

3. Броят на четирицифрените числа, за които след изтриване на коя да е тяхна цифра полученото число се дели на 7, е равен на:

А) 6; Б) 7; В) 8; Г) 9.

4. Броят на решенията на системата 
$$\begin{cases} x + y = yz \\ y + z = zx \\ z + x = xy \end{cases}$$
 в рационални числа е равен на:

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

5. Най-голямото число  $a$ , за което уравнението  $x^4 - 2ax^3 + a(a+1)x - 2ax + a^2 = 0$  има реален корен, е равно на:

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3.

6. Броят на двойките  $(x, y)$  от цели числа, за които  $x < 2008$  и  $x^3 = y^2 + xy$  е равен на

А) 87; Б) 88; В) 89; Г) 90.

**Задача 7.** Допирателните през  $A$  и  $B$  към описаната около  $\triangle ABC$  окръжност се пресичат в точка  $D$ . Нека  $E$  и  $F$  са проекциите на  $D$  върху правите  $AC$  и  $BC$ . Да се докаже, че правата  $EF$  е перпендикулярна на медианата през върха  $C$ .

**Задача 8.** Нека  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  е такава функция, че  $f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$  за произволни  $x, y > 0$ .

а) Да се докаже, че  $(y - 1)(f(y) - 1) \leq 0$ .

б) Да се намерят всички функции, изпълняващи даденото равенство.