СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ „ИВАН САЛАБАШЕВ“- СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир „Иван Салабашев“

4 декември 2010 г.

Тема за 10., 11., 12. клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачи от 1 до 6 има 4 отговора, само един от които е верен. Решенията на задачи 7 и 8 трябва да бъдат подробно обяснени. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 6 се присъждат по 3 точки. За вярно решение на всяка от задачи 7 и 8 се присъждат по 6 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/salabashev/.

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. За колко стойности на реалния параметър a правите

$$x+y=10, \quad x+y=11, \quad x+2y=12, \quad x+2y=a$$

ограждат четириъгълник, в който може да се впише окръжност?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

2. Колко са реалните решения на системата $\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+y^2}=z+1\\ \sqrt{y+z^2}=x+1\\ \sqrt{z+x^2}=y+1\ ?\end{array}\right.$

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

3. Колко са различните цифри в десетичния запис на n^3, където $n = 999\,999\,999$?

А) 2 **Б)** 4 **В)** 6 **Г)** 8

4. Средното аритметично на неотрицателните цели числа, ненадминаващи 8888, и нямащи деветки в десетичния си запис, е записано като несъкратима дроб. Броят на простите делители на числителя на тази дроб е равен на: **А)** 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

5. Даден е $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ABC = 120^\circ$. Ако $D \in AC$, $\sphericalangle ABD = 90^\circ$ и $AB = CD = 1$, то AD^3 е равно на: **А)** 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5

6. Броят на ненаредените двойки (m,n) от естествени числа, за които m дели $2n+1$ и n дели $2m+1$, е равен на: **А)** 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Задача 7. Нека $a_0 = 1$ и $a_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1}(n-i)^2 a_i$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:

а) съществуват числа $p, q, r \in \mathbb{R}$ такива, че $a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$ за всяко $n \geq 1$;

б) $a_{n+1} > (2+\sqrt{2})a_n$ при $n \geq 1$.

Задача 8. Да се докаже, че ако $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a^2+b^2+c^2 = 3$, то

$$\frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c} \leq 1.$$