Математически турнир „Иван Салабашев“, 2010 г.
Решения на задачите от темата за 10.-11.-12. клас

1. За колко стойности на реалния параметър a правите

$$x + y = 10, \quad x + y = 11, \quad x + 2y = 12, \quad x + 2y = a$$

ограждат четириъгълник, в който може да се впише окръжност?

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

Отговор В). Тези прави ограждат успоредник, една от страните, на които се мени успоредно на правата $x + 2y = 0$. В успоредник може да се впише окръжност точно когато той е ромб, а това се реализира за две стойности на a (симетрични спрямо 12).

2. Колко са реалните решения на системата $\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+y^2} = z+1\\ \sqrt{y+z^2} = x+1\\ \sqrt{z+x^2} = y+1 \text{ ?}\end{array}\right.$

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

Отговор Б). Имаме, че $x, y, z \geq -1$. От друга страна, като повдигнем уравненията на квадрат и ги съберем, получаваме $x + y + z = -3$. Значи $x = y = z = -1$, като това е решение на системата.

3. Колко са различните цифри в десетичния запис на n^3, където $n = 999\,999\,999$?

А) 2; **Б)** 4; **В)** 6; **Г)** 8.

Отговор Б). Ако $n = 10^k - 1$, то $n^3 = 10^{2k}(10^k - 3) + (3.10^k - 1) = 9\dots 970\dots 029\dots 9$ (където първите девятки и нулите са по $k - 1$, а последните девятки са k на брой).

4. Средното аритметично на неотрицателните цели числа, ненадминаващи 8888, и нямащи девятки в десетичния си запис, е записано като несъкратима дроб. Броят на простите делители на числителя на тази дроб е равен на: **А)** 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

Отговор В). Нека $a_0 10^3 + a_1 10^2 + a_2 10 + a_3$ е едно от разглежданите числа. Тогава a_i може да е всяка цифра от 0 до 8 и значи средната стойност на a_i е равна на $\frac{0+1+\cdots+8}{9} = 4$. Следователно разглежданото средно аритметично е равно на $4(1 + 10 + 10^2 + 10^3) = 2^2.11.101$.

5. Даден е $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ABC = 120^\circ$. Ако $D \in AC$, $\sphericalangle ABD = 90^\circ$ и $AB = CD = 1$, то AD^3 е равно на:

А) 2; **Б)** 3; **В)** 4; **Г)** 5.

Отговор А). Нека $x = AD$ и $y = BC$. Тогава $\sin \sphericalangle ADB = \frac{1}{x}$ и $\frac{\sin \sphericalangle BDC}{y} = \frac{\sin 30^\circ}{1} = \frac{1}{2}$, откъдето $\frac{1}{x} = \frac{y}{2}$. Следователно

$$-\frac{1}{2} = \cos \sphericalangle ABC = \frac{1 + y^2 - (1+x)^2}{2y} = \frac{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 - (1+x)^2}{\frac{4}{x}}.$$

Оттук $x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$, т.е. $(x+2)(x^3-2) = 0$ и значи $x = \sqrt[3]{2}$.

6. Броят на ненаредените двойки (m, n) от естествени числа, за които m дели $2n + 1$ и n дели $2m + 1$, е равен на:

А) 1;   **Б)** 2;   **В)** 3;   **Г)** 4.

Отговор В). Нека $m \le n$, $k = \frac{2m+1}{n}$ и $l = \frac{2n+1}{m}$. Тогава $m = \frac{k+2}{kl-4}$ и $n = \frac{l+2}{kl-4}$. Следователно $1 \le kl - 4 \le k + 2$, т.е. $\frac{5}{l} \le k \le \frac{6}{l-1}$ и $1 \le k \le l$. Оттук $3 \le l \le 7$. При $5 \le l \le 7$, следва, че $k = 1$, при $l = 4 - k = 2$, а при $l = 3 - k = 2$ или $k = 3$. Непосредствена проверка показва, че решения имаме само при $(k, l) = (1, 5), (1, 7), (3, 3)$ и те са $(m, n) = (3, 7), (1, 3), (1, 1)$.

Задача 1. Нека $a_0 = 1$ и $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 a_i$ при $n \ge 1$. Да се докаже, че:
а) съществуват числа $p, q, r \in \mathbb{R}$ такива, че $a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$ за всяко $n \ge 1$.
б) $a_{n+1} > (2 + \sqrt{2})a_n$ при $n \ge 1$.

Решение. а) Като пресметнем първите шест члена, намираме, че $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ при $n = 1, 2, 3$. Ще докажем това за всяко $n \ge 1$. Имаме, че

$$a_{n+1} - a_n = a_n + \sum_{i=0}^{n-1} ((n+1-i)^2 - (n-i)^2)a_i = \sum_{i=1}^{n} (2n+1-2i)a_i.$$

Тогава

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (2n+3-2i)a_i$$

и като извадим тези равенства получаваме

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = a_{n+1} + 2\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Остава да извадим това равенство от

$$a_{n+3} - 2a_{n+2} + a_{n+1} = a_{n+2} + 2\sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

б) Неравенството се проверява директно при $n = 1, 2$. При $n \ge 3$ от а) имаме, че

$$a_{n+1} > 4a_n - 2a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n+1} - (2+\sqrt{2})a_n > (2-\sqrt{2})(a_n - (2+\sqrt{2})a_{n-1})$$

и твърдението следва по индукция.

Оценяване. а) 4 т., от които 2 т. ако само са посочени p, q и r; 2 т. за б).

Задача 2. Да се докаже, че ако $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, то

$$\frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c} \le 1.$$

Решение. Понеже $a, b, c \le \sqrt{3} < 4$, ако някое от тези числа е отрицателно, като го сменим с противоположното му, неравенството се усилва. И така, можем да считаме, че $a, b, c \ge 0$. От $3 = a^2 + b^2 + c^2 \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$ следва, че $abc \le 1$ и значи $ab + bc + ca \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2} \ge 3abc$. Тогава

$$3(4-a)(4-b)(4-c)\left(\frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c}\right)$$

$$= 4(12 - 6(a+b+c) + (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2) + ab + bc + ca - 3abc$$

$$\geq 4(9-6(a+b+c)+(a+b+c)^2)=4(a+b+c-3)^2 \geq 0.$$

Оценяване. 3 т. за преобразуване на неравенството до $4(a+b+c-3)^2+ab+bc+ca \geq 3abc$ и 3 т. за довършване на решението. 4 т. ако неравенството е доказано само за неотрицателни числа.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.