

# Математически турнир „Иван Салабашев“, 2010 г.

## Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Ако  $m = 13^3 - 3^7$  и  $n = 10$ , то  $\frac{m}{n}$  е:

А) -1   Б) 1   В) -10   Г) 10

**Отговор: (Б).** Имаме  $\frac{m}{n} = \frac{2197 - 2187}{10} = 1$ .

2. Стойността на израза

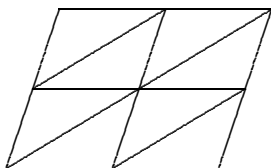
$$\left[ \frac{(a^6b)^3}{(b^6c)^2} : \frac{(a^2c)^9}{(b^2a)^6} \right] : \left( \frac{ab}{c^3} \right)^3$$

при  $a = 4$ ,  $b = 7$  и  $c = 8$  е:

А) 1   Б) 2   В) 4   Г)  $\frac{1}{2}$

**Отговор: (А).** Изразът е равен на  $\frac{a^{18}b^3b^{12}a^6}{b^{12}c^2a^{18}c^9} \cdot \frac{c^9}{a^3b^3} = \frac{a^3}{c^2}$ . След заместване получаваме, че търсената стойност е 1.

3. Колко са успоредниците на фигурата?



А) 13   Б) 12   В) 11   Г) 10

**Отговор: (А).** Успоредниците са съставени от два, четири или осем триъгълника, като са съответно по 8, 4 и 1 от всеки от тези видове. Следователно търсеният брой е  $8 + 4 + 1 = 13$ .

4. Най-малкото цяло число, което е по-голямо от числото  $a + b$ , където  $a = 6(2^2 + 3^2) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$  и  $b = 12(3^2 + 4^2) \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$ , е:

А) 2   Б) 3   В) 4   Г) 5

**Отговор: (Г).** Имаме  $a = 6(4 + 9) \frac{1}{6^2} = \frac{13}{6}$  и  $b = 12(9 + 16) \frac{1}{12^2} = \frac{25}{12}$ , откъдето  $a + b = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$  и значи търсеното число е 5.

5. Дължините на всички страни на 100-ъгълник  $M$  са увеличени с по 1%. С колко процента периметърът на новия многоъгълник е по-голям от периметъра на  $M$ ?

А) 1%   Б) 10%   В) 100%   Г) 0%

**Отговор: (А).** Ако периметърът на  $M$  е  $P = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ , но новият периметър е  $P_1 = 1.01a_1 + 1.01a_2 + \dots + 1.01a_{100} = 1.01(a_1 + a_2 + \dots + a_{100}) = 1.01P$ , т.е. увеличението е с 1%.

6. В числото  $a = \overline{501x73y}$  цифрите  $x$  и  $y$  са такива, че  $a$  се дели на 5 и на 9 и дава остатък 2 при деление на 4. Да се намери  $x$ .

А) 0 Б) 1 В) 5 Г) друго число

**Отговор: (Г).** От делимостта на 5 следва, че  $y = 0$  или  $5$ , а остатък 2 при делени на 4 дават само четните числа, т.е.  $y = 0$ . Тъй като  $a$  се дели на 9, сумата от цифрите му също се дели на 9, т.е.  $16 + x + y$  се дели на 9. Тогава  $x = 2$ , т.е. правилният отговор е ”Друго число”.

7. Колко са петцифрените числа, които не се делят на 1000, а първата и последната им цифра са четни?

А) 19950 Б) 19954 В) 19960 Г) 19964

**Отговор: (В).** Ако забравим за момент за делимостта на 1000, първата цифра може да е 2, 4, 6 или 8 (4 възможности), втората, третата и четвъртата могат да са произволни (по 10 възможности), а петата може да е 0, 2, 4, 6 или 8 (5 възможности). Получаваме общо  $4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 20000$  числа. От тях на 1000 се делят 20000, 21000, ..., 29000, 40000, ..., 89000, общо 40 числа. Следователно търсеният брой е  $20000 - 40 = 19960$ .

8. Числата 1, 2, 3, ..., 24 са разбити на 12 двойки и от всяка двойка  $(a, b)$  е образувана дроб  $\frac{a}{b}$ . Колко най-много от тези дроби могат да бъдат цели числа?

А) 9 Б) 10 В) 11 Г) 12

**Отговор: (Б).** Простите числа 13, 17, 19 и 23 могат да дадат дроб, която е цяло число, само ако са в двойка с 1. Това означава, че поне две от дробите няма да са цели числа, т.е. търсеният максимален брой не надминава 10. От друга страна, следните 10 двойки: (4, 2), (12, 6), (14, 7), (15, 5), (16, 8), (18, 9), (20, 10), (21, 3), (22, 11) и (13, 1) (остават например (17, 19) и (23, 24)) дават цели числа.

9. Една лодка изминава за едно и също време 34 км по течението и 26 км срещу течението на една река. Каква е скоростта на течението на тази река, ако е известно, че в спокойна вода лодката се движи със скорост 15 км/ч?

А) 1,5 км/ч Б) 2 км/ч В) 3 км/ч Г) 4 км/ч

**Отговор: (Б).** Ако скоростта на течението е  $x$ , то скоростите по и срещу течението са съответно  $15 + x$  и  $15 - x$ . Тогава от условието следва, че  $\frac{34}{15+x} = \frac{26}{15-x}$ , откъдето последователно имаме  $510 - 34x = 390 + 26x$ ,  $60x = 120$ ,  $x = 2$ .

10. С  $n!$  се означава произведението на всички естествени числа от 1 до  $n$ , т.е.  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Кое е най-малкото естествено число  $n$ , за което  $n!$  се дели едновременно на 11 и 12?

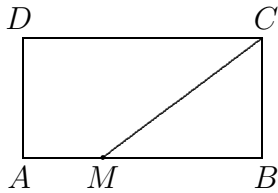
А) 10 Б) 11 В) 12 Г) 13

**Отговор: (Б).** Тъй като 11 е просто число, няма как  $n!$  да се дели на 11 при  $n \leq 10$ . От друга страна,  $11!$  се дели на 11 (защото съдържа множител 11) и на 12 (защото съдържа множители 3 и 4). Следователно търсеното число е 11.

11. Естественото число  $n$  е произведение на две прости числа, а сумата от всичките му естествени делители, без самото  $n$ , е 1012. Да се намери  $n$ .

**Отговор: (2018).** Нека  $n = pq$ , където  $p$  и  $q$  са прости числа. Тогава от условието следва, че  $1 + p + q = 1012$ . Тъй като  $p + q = 1011$  е нечетно число, едно от числата  $p$  и  $q$  е равно на 2. Тогава другото е равно на 1009 (което е просто число) и получаваме  $n = pq = 2 \cdot 1009 = 2018$ .

12. Даден е правоъгълник  $ABCD$ , в който страната  $AB$  е два пъти по-голяма от страната  $BC$ . Върху страната  $AB$  е избрана точка  $M$  така, че  $3AM = AB$ . Да се намери лицето на  $ABCD$ , ако разликата в периметрите на четириъгълника  $AMCD$  и триъгълника  $BMC$  е 40 см.

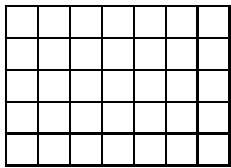


**Отговор: (1800).** Да означим  $AM = x$ . Тогава  $AB = 3x$  и  $BC = \frac{3x}{2}$ , а интересувашите ни периметри са съответно  $P_{AMCD} = x + MC + 3x + \frac{3x}{2} = \frac{11x}{2} + MC$  и  $P_{MBC} = 2x + \frac{3x}{2} + MC = \frac{7x}{2} + MC$ . Следователно  $30 = P_{AMCD} - P_{MBC} = 2x$ , откъдето  $x = 20$ . Тогава  $AB = 3x = 60$ ,  $BC = AB/2 = 30$  и  $S_{ABCD} = 60 \cdot 30 = 1800$ .

13. Нека  $n$  е такова естествено число, че последната цифра на числото  $A = n^2 + 1008n$  е 4. Да се намери предпоследната цифра на  $A$ .

**Отговор: (8).** Тъй като  $1000n$  завършва на три нули,  $A$  има същите последни три цифри, както и числото  $B = A - 1000n = n^2 + 8n$ . От условието следва, че  $B + 16 = (n + 4)^2$  завършва на 0, а тъй като е точен квадрат, трябва да завършва на две нули. Тогава  $B$ , оттам и  $A$ , завършва на  $100 - 16 = 84$ , т.е. търсената предпоследна цифра е 8.

14. Най-много колко фигурки от вида  могат да се разположат в правоъгълник  $5 \times 7$  ?



(Фигурките могат да се завъртат и обръщат, но не и да се припокриват.)

**Отговор: (11).** Тъй като лицето на една фигурка е 3, а лицето на правоъгълника е 35, няма как да имаме повече от 11 фигури без припокриване (защото  $11 \cdot 3 < 35 < 12 \cdot 3$ ). Не е трудно да се посочи пример с 11 фигури.

15. Произведението на цифрите на едно естествено число е 180. Да се намери най-голямата възможна стойност на това число, ако е известно, че никои две от неговите цифри не са еднакви.

**Отговор: (65321).** Цифрите, които са делители на 180, са 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 9. Тъй като търсим максимално число, 1 със сигурност участва (иначе ще я добавим и ще увеличим числото, а произведението остава същото). Ако 9 участва в числото, останалите цифри са с произведение 20 и единствената възможност е 1, 4 и 5, като нашето число е четирицифрено.

Ако 9 не участва, непременно участват 3 и 6 (иначе произведението няма да се дели на 9). Останалите цифри са с произведение 10 и единствената възможност е 1, 2 и 5. Числото сега е петцифрено (значи по-голямо от горното) и е най-голямо, ако цифрите му се наредят в низходящ ред, т.е. 65321.

**Задачите от тази тема са предложени от Петър Бойваленков.**