Математически турнир „Иван Салабашев“, 2010 г.
Решения на задачите от темата за 8-9 клас

1. Отговор: А. От $x-y>0, x-1<0, x-y-1<0$ следва, че изразът е равен на

$$(x-y)+(1-x)+(1+y-x)=2-x.$$

2. Отговор: Б. Понеже n се дели на 5 последната му цифра е 0. Нека броят на цифрите, които са равни на 8 е x. Тогава $3|x$ и значи най-малкото n с исканото свойство е 8880 и $\frac{n}{15}=592$.

3. Отговор: А. Уравнението е еквивалентно на $(x-1)(x-3)=(x-2)(x-k), x\neq 2,3$. Оттук $(k-2)x=2k-3$. Последното уравнение няма решение при $k=2$. Трябва да се изключат и тези k, за които то има решения $x=2$ и $x=3$. Първото е невъзможно, а второто се получава при $k=3$. Търсеното произведение е $2.3=6$.

4. Отговор: В. Имаме

$$ab=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2=\frac{(a+b)^2}{ab}.$$

Оттук $(ab)^2=(a+b)^2$, т.е. $ab=a+b$. Като разделим на ab получаваме, че $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.

5. Отговор: А. Нека CH е височината в $\triangle ABC$. Тъй като $\angle ABC=180^\circ-\angle BCD=30^\circ$ от правоъгълния $\triangle HBC$ намираме, че $HC=\frac{BC}{2}=2$. Следователно $S_{ABC}=\frac{AB.CH}{2}=8$. Тъй като $AB\|CD$, то височината на $\triangle DCB$ към CD е равна на CH. Тогава $S_{BCD}=\frac{CD.CH}{2}=6$. Окончателно $S_{AOB}-S_{COD}=S_{ABC}-S_{BCD}=8-6=2$.

6. Отговор: Г. . Привеждаме към общ знаменател и получаваме $7x-9=a(x-2)+b(x-1)$. След сравняване на кофициентите стигаме до системата $a+b=7, 2a+b=9$. Оттук $a=2, b=5$ и $ab=10$.

7. Отговор: Г. Нека равните цифри са 1. Тогава числата имат вида $11xy, 1x1y$ или $1xy1$, където $x\neq y, x\neq 1, y\neq 1$. . Следователно има $3.8.9=216$ такива числа. Ако равните цифри не са 1, то числата имат вида $1xxy, 1xyx$ или $1yxx$, където $x\neq y, x\neq 1, y\neq 1$. Отново имаме $3.8.9=216$ възможности и общият брой на разглежданите числа е $216+216=432$.

8. Отговор: А. Нека $\angle ACD=\angle BAE=x$. От $\triangle AEB$ следва,че $60^\circ=\angle BAE+\angle ABC$, т.е. $\angle ABC=60^\circ-x$. Тъй като $\angle ACB=60^\circ+x$ заключаваме, че $\angle BAC=180^\circ-(60^\circ-x)-(60^\circ+x)=60^\circ$. Нека H е петата на перпендикуляра от B към правата AC. Тъй като $\angle ABH=30^\circ$, то $AH=\frac{AB}{2}=AC$, т.е. $C=H$. Следователно $\angle ACB=90^\circ$ и $\angle ABC=30^\circ$.

9. Отговор: В. Числата $a-b$ и $a+b$ са различни прости числа от еднаква четност, т.е. те са нечетни. Следователно едно от числата a и b е 2. Тъй като $a+b>a>a-b$ следва,че $b=2$ и числата $a-2, a$ и $a+2$ са прости. Тъй като поне едно от тях се дели на 3 заключаваме, че $a-2=3$, т.е $a=5$. Сумата на дадените числа е $2+3+5+7=17$, което е просто число.

10. Отговор: Г. Записваме даденото равенство във вида $(3x^2+1)(y^2-7)=117=3^2.13$. Тъй като $3x^2+1$ не се дели на 3, то $3x^2+1=13, y^2-7=9$. Оттук $x^2=4, y^2=16$ и $3x^2y^2=3.4.16=192$.

11. Отговор: 105. Нека $S_{EFC}=x, S_{FDC}=y$. Тогава $\frac{x+2}{y}=\frac{AF}{FD}=\frac{3}{4}$, т.е.$3y-4x=8$. Аналогично

$\frac{y+4}{x} = \frac{FB}{FE} = \frac{3}{2}$, т.е.$3x - 2y = 8$. От получената система намираме,че $x = 40, y = 56$ и значи $S_{ABC} = 2 + 3 + 4 + 40 + 56 = 105$.

12. Отговор: 757. От условието следва, че $a = x^4, b = x^5, c = y^2, d = y^3$, където x и y са естествени числа. Тогава $19 = c - a = y^2 - x^4 = (y - x^2)(y + x^2)$. Оттук $y - x^2 = 1, y + x^2 = 19$, т.е. $y = 10, x = 3$. Сега $d - b = y^3 - x^5 = 10^3 - 3^5 = 757$.

13. Отговор: 43. Ако $x \geq 4$, то $x^{[x]} \geq 4^4 > 100$. Следователно $x < 4$. Имаме следните възможности:
$[x] = 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \Rightarrow N = x^0 = 1$;
$[x] = 1 \Leftrightarrow x \in [1, 2) \Rightarrow N = x \Rightarrow N = 1$;
$[x] = 2 \Leftrightarrow x \in [2, 3) \Rightarrow N = x^2 \Rightarrow N \in [4, 9)$;
$[x] = 3 \Leftrightarrow x \in [3, 4) \Rightarrow N = x^3 \Rightarrow N \in [27, 64)$.
Следователно за N имаме общо $1 + 5 + 37 = 43$ възможности.

14. Отговор: 11. За всяко n имаме
$d_n = (2010 + n^2, 2010 + (n + 1)^2) = (2010 + n^2, 2010 + (n + 1)^2 - (2010 + n^2)) =$
$(2010 + n^2, 2n + 1) = (4n^2 + 4.2010, 2n + 1) = ((2n + 1)^2 - 4n - 1 + 4.2010, 2n + 1)$
$= (-2(2n + 1) + 8041, 2n + 1) = (8041, 2n + 1)$.
Тъй като $8041 = 11.17.43$ следва,че най-малката стойност на d_n, която е различна от 1 е 11. Тя се получава, например, за $n = 5$.

15. Отговор: 2.3^{1005}. Нека

$$3^{2011} = (k + 1) + (k + 2) + \ldots + (k + n) = kn + \frac{n(n + 1)}{2},$$

т.е. $n(2k + n + 1) = 2.3^{2011}$. Тогава n е делител на 2.3^{2011}. От друга страна $2.3^{2011} > n(n + 1) > n^2$, т.е.$n < 3^{1006}$. Следователно най-голямата стойност на n е 2.3^{1005}. В този случай $k = \frac{3^{1005} - 1}{2}$.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.