СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ „ИВАН САЛАБАШЕВ“- СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир „Иван Салабашев“

1 декември 2012 г.

Тема за 10., 11., 12. клас

(време за работа 120 минути)

Отговорът на всяка от задачите от 1 до 6 е цяло число от 0 до 99. Решенията на задачи 7 и 8 трябва да бъдат подробно обяснени. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 6 се присъждат по 2 точки. За вярно решение на задача 7 се присъждат 5 точки, а за вярно решение на задача 8 се присъждат 7 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/salabashev/ след 20.12.2012 г.

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Нека $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ и P е полином от трета степен с цели коефициенти, един от които е равен на 1. Ако $P(\alpha) = 0$, да се намери $P(1)$.

2.Да се намери най-голямата възможна стойност на лицето на изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който $AB + CD = 12$ и $AD + BC = 20$.

3. Да се намери най-малкото естествено число k със следното свойство: ако $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+2} = a_{n+1} + ka_n$ при $n \geq 1$, то a_n не е точен квадрат за всяко $n \geq 3$.

4. Числата от 1 до 8 са разположени във върховете на осмоъгълник така, че сумата на числата във всеки три последователни върха е поне n. Да се намери най-голямата възможна стойност на n.

5. Ако $a \leq 99$, b и c са такива естествени числа, че $c^2 = ab - 1$ и $(a-b)^2 = 4c - 3$, да се намери най-голямата възможна стойност на a.

6. Ако P е полином с неотрицателни цели коефициенти, за който $P(12) = 2012$, да се намери най-малката възможна стойност на $P(2)$.

Задача 7. Да се намерят всички редици $a_1, a_2, \ldots$ от реални числа такива, че $a_{mn+1} = a_m a_n + 1$ за произволни $m, n \in \mathbb{N}$.

Задача 8. Да се намери стойността на реалния параметър k така, че триъгълникът с върхове пресечните точки на графиката на функцията $y = x^2 + kx - 1$ с координатните оси има най-малък радиус на вписаната окръжност.