СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ „ИВАН САЛАБАШЕВ“- СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир „Иван Салабашев“

7 декември 2013 г.

Тема за 10., 11., 12. клас

(време за работа 120 минути)

Отговорът на всяка от задачите от 1 до 6 е цяло число от 0 до 99. Решенията на задачи 7 и 8 трябва да бъдат подробно обяснени. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 6 се присъждат по 2 точки. За вярно решение на всяка от задача 7 и задача 8 се присъждат по 5 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/salabashev/ след 24.12.2013 г.

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Да се намери лицето на вписан в окръжност четириъгълник с дължини на последователни страни 1, 7, 5, 5.

2. По колко начина 3 бели и 10 черни пула могат се разположат на права така, че да няма бял пул със съседи два черни пула?

3. Да се намери броя на трицифрените естествени числа, средната цифра на които е средно аритметично на останалите две.

4. Да се намери максималния брой различни естествени числа, ненадминаващи 2013, сумата на всеки три от които се дели на 33.

5. Уравнението $8x^3-3x^2-3x-1=0$ има реален корен от вида $\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+1}{c}$, където a, b, c са естествени числа. Да се намери $a+b+c$.

6. Да се намери сумата от първите две цифри след десетичната запетая на числото $\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{1}{99^2}+\dfrac{1}{100^2}}$.

Задача 7. Нека M е точка върху по-малката дъга EF от описаната окръжност около правилен шестоъгълник $ABCDEF$. Да се докаже, че отношението $\dfrac{AM+BM+CM+DM}{EM+FM}$ не зависи от M.

Задача 8. Да се намерят всички естествени числа $a \in [4, 99]$, за които числото $\overline{2013}_{(a)}$ е точен квадрат.