Математически турнир „Иван Салабашев“, 2013 г.
Решения на задачите от темата за 6. клас

1. Изразът $\dfrac{(4^2)^3.5^7}{10^{12}}$ е равен на: **А)** $\dfrac{1}{10^7}$ **Б)** $\dfrac{1}{5^7}$ **В)** $\dfrac{1}{5^5}$ **Г)** $\dfrac{2^5}{5^7}$

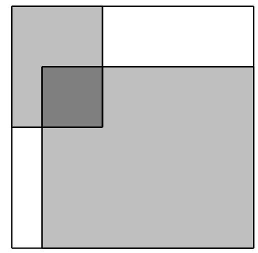
Отговор: В.

2. За дробите $A = \dfrac{2013}{2012}$ и $B = \dfrac{201400002014}{201300002013}$ е вярно, че:

А) $A > B$ **Б)** $A < B$ **В)** $A = B$ **Г)** $A = 3B$

Отговор: А. Тъй като $B = \dfrac{201400002014}{201300002013} = \dfrac{2014}{2013}$ и $2013^2 > 2012.2014$, то $A > B$.

3. Върху бял квадратен лист са поставени два сиви правоъгълни листа с обиколки 52 см и 28 см, както е показано на чертежа. Сивите листи се припокриват и общата им част е квадрат с обиколка, равна на страната на белия квадрат. Колко сантиметра е страната на белия квадратен лист?



А) 16 **Б)** 20 **В)** 18 **Г)** 12

Отговор: А. Сборът от обиколките на двата правоъгълника е равен на сбора от обиколките на двата квадрата. Следователно $52 + 28 = 5x$, откъдето $x = 16$.

4. Ако $a\diamondsuit b = \dfrac{a+b}{a-b}$ и $(3\diamondsuit x)\diamondsuit 2 = 0$ на колко е равно числото x? **А)** 9 **Б)** 7 **В)** 5 **Г)** 3

Отговор: А. Имаме $(3\diamondsuit x)\diamondsuit 2 = \dfrac{3+x}{3-x}\diamondsuit 2 = \dfrac{\frac{3+x}{3-x}+2}{\frac{3+x}{3-x}-2}$, откъдето $\dfrac{3+x}{3-x} + 2 = 0$. Оттук намираме $x = 9$.

5. В два чувала има съответно a и b кг. захар. Известно е, че $a - b$ е равно на $2a$ процента от b и на a процента от a. На колко е равно $a + b$? **А)** 50 **Б)** 75 **В)** 100 **Г)** 125

Отговор: Б. От условието следва, че $\dfrac{2a}{100}.b = \dfrac{a}{100}.a = a - b$. От първото равенство намираме $a = 2b$ и след заместване във второто равенство получаваме $b = 25$. Тогава $a = 50$ и $a + b = 75$.

6. Иван е x пъти по-малък от брат си, а преди една година той бил $x+1$ пъти по-малък от брат си. Ако сборът от годините на Иван и брат му е 30, на колко години е Иван? **А)** 10 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6

Отговор: Г. Ако годините на Иван са a, то годините на брат му са ax и $a + ax = 30$. От условието имаме $(x + 1)(a - 1) = ax - 1$, откъдето $ax - x + a - 1 = ax - 1$, т.е. $x = a$. Тогава $a + a^2 = 30$ и значи $a = 5$.

7. В кутия има 7 червено-зелени, 6 зелено-сини и 5 синьо-червени топки. Какъв най-малък брой топки трябва да извадим от кутията без да гледаме, че да сме сигурни, че някой цвят ще се среща на поне 5 топки?

А) 5 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** 8

Отговор: В. Ако a, b и c са топките от съответните видове, то при $a = b = c = 2$ нямаме цвят върху 5 топки. Ако $a + b + c = 7$, то поне един от сборовете $a + b$, $b + c$ и $a + c$ е поне 5 и следователно има цвят върху 5 топки.

8. С цифрите 6, 7, 8 и 9 е съставено четирицифрено число, като всяка цифра е използвана само веднъж. Ако това число се дели на $2^a.3^b$, най-много колко е $a+b$?

А) 4 **Б)** 5 **В)** 6 **Г)** 7

Отговор: В. Тъй като $6+7+8+9=30$, то всяко число от дадения вид се дели на 3, но не се дели на 9, т.е. $b=1$. Тъй като търсим най-голямата степен на двойката, съставяме тези числа, които се делят на 8. От признаците за делимост на 4 и 8 следва, че кратните на 8 числа са $8976, 7896, 7968, 9768$. От тях числото, което се дели на най-голяма степен на 2, е $7968 = 32.249$, т.е. $a=5$ и $a+b=6$.

9. Ирина написала на един лист естествените числа от 1 до n. Теодора изтрила от листа числата, които се делят на 3 и числата, които се делят на 5. Останали 241 числа. Колко е n?

А) 439 **Б)** 445 **В)** 451 **Г)** 457

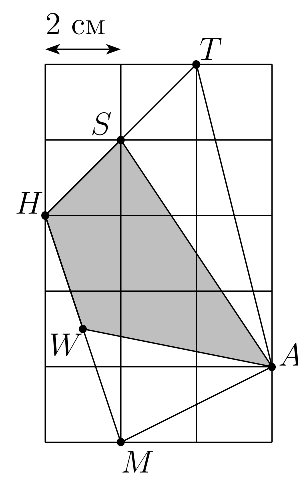
Отговор: В. От 1 до 15 се изтриват $15:3=5$ кратни на 3 числа , $15:5=3$ кратни на 5 числа, като числото 15 попада и в двете групи. Следователно са изтрити $5+3-1=7$ числа и останали $15-7=8$ числа. Тъй като $241 = 30.8+1$, то $n = 30.15+1 = 451$.

10. В училището Хогуортс постъпили два пъти повече момчета, отколкото момичета. Разпределителната шапка изпратила в Грифиндор 25% от момичетата и 20% от момчетата, общо нови 39 ученици. Колко деца постъпили в Хогуортс? **А)** 120 **Б)** 144 **В)** 180 **Г)** 240

Отговор: В. Ако момичетата са y, то момчетата са $x=2y$. Тогава $\frac{1}{4}y + \frac{1}{5}2y = 39$, откъдето $y=60$. Учениците са $x+y=3y=180$.

11. В турнир по футбол участвали 6 отбора, като всеки два отбора изиграли точно една среща. В крайното класиране първите три отбора събрали по a точки всеки, а последните три отбора събрали по b точки всеки, като $a>b$. Колко различни стойности може да приема сбора $a+b$?
Отговор: 5. Общо са изиграни 15 срещи и следователно всички отбори са събрали общо между 30 и 45 точки. Тогава $30 \le 3(a+b) \le 45$ или $10 \le a+b \le 15$. Ако $a+b=10$, то всички срещи са завършили наравно и всички отбори имат по 5 точки, противоречие. При $a+b = 11, 12, 13, 14, 15$ лесно се построяват примери на турнири с исканото свойство.

12. На чертежа четириъгълникът $MATH$ е построен в квадратна мрежа. Точките W и S са средите на страните MH и HT съответно. Колко квадратни сантиметра е лицето на четириъгълника $WASH$?
Отговор: 17. Лицето на четириъгълника $MATH$ е $60-8-4-8-6=34$ кв.см. Лицето на $WASH$ е половината от лицето на $MATH$, т.е. 17 кв.см.



13. Правоъгълен лист е разрязан с ножици на две по права линия. След това едно от двете парчета отново е разрязано на две и т.н. общо са направени 10 разрязвания. Ако едно от получените парчета е 14-ъгълник, колко от получените парчета са триъгълници?
Отговор: 10. При всяко разрязване броят на върховете на многоъгълника с най-много върхове се увеличава най-много с 1 (това става когато разрезът се направи между две точки върху две съседни страни на разрязвания многоъгълник). Това означава, че след 10 разрязвания многоъгълникът с максимален брой върхове има най-много 14 върха. Следователно всички

останали многоъгълници са триъгълници и понеже общо са получени 11 многоъгълника (всяко разрязване увеличава броя на парчетата с 1), то имаме 10 триъгълника.

14. В таблица 3×3 са записани цифрите $1, 2, 3, \ldots, 9$, като всяка цифра е записана по един път. Сборът на числата във всеки квадрат 2×2 е втора степен на естествено число. Кое е числото, записано в квадратчето със $\star$?

2	1	6
$\star$		

Отговор: 3. Нека числата са $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 6 \\ \hline a & b & c \\ \hline x & y & z \\ \hline \end{array}$. Понеже $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ и $9 + 8 + 7 + 6 = 30$, то сборът на числата във всеки квадрат 2×2 е 16 или 25. Тогава $a + b = 13$ и $x + y = 12$ (защото $x + y > 3$). Освен това $b + c = 9$ (защото $b + c < 18$) и лесно се вижда, че $y + z = 16$. От горните равенства се получава и решението $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 6 \\ \hline 8 & 5 & 4 \\ \hline 3 & 9 & 7 \\ \hline \end{array}$.

15. Оцветени са a от върховете на куб така, че върху всяка стена оцветените върхове са нечетен брой. За колко различни стойности на a може да се направи това?

Отговор: 3. Две успоредни стени на куба съдържат всичките му върхове, а от условието следва, че върху тях има общо четен брой избрани върхове. Следователно $a = 2, 4, 6$ или 8. При $a = 8$ трябва да изберем всички върхове, което противоречи на условието върху всяка стена да са избрани нечетен брой върхове. За всеки от случаите $a = 2, 4, 6$ лесно се построява пример със съответния брой върхове.

Задачите от тази тема са предложени от Емил Колев.