СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ „ИВАН САЛАБАШЕВ“- СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир „Иван Салабашев“

6 декември 2014 г.

Тема за 10., 11., 12. клас

(време за работа 120 минути)

Отговорът на всяка от задачите от 1 до 6 е цяло число от 0 до 99. Решенията на задачи 7 и 8 трябва да бъдат подробно обяснени. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 6 се присъждат по 2 точки. За вярно решение на всяка от задачите 7 и 8 се присъждат по 6 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори.
Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/salabashev/ след 24.12.2014 г.

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Да се намери сумата от цифрите на всички естествени числа n, за които $\sum_{i=1}^{6}\left[\frac{n}{i!}\right] = 2014$. ($[x]$ е цялата част на числото x)

2. Квадрат K с размери 3×3 е разделен на 9 единични квадратчета. Във върховете на квадратчетата са записани числата от 1 до 16 така, че сумата на четирите числа върху всяка страна на K е равна на сумата S на четирите числа, записани във вътрешността на K. Да се намери най-голямата възможна стойност на S.

3. Да се пресметне сумата $\cos^2 2^\circ + \cos^2 4^\circ + \cdots + \cos^2 88^\circ$.

4. Да се намери броят на целите числа a, за което уравнението $x^3 - 13x = a$ има три различни цели корена.

5. Да се най-голямото двуцифрено число n такова, че 35 дели $5x^7 + 7x^5 + nx$ за всяко цяло число x.

6. В кутия има 5 бели и 5 черни топки. Четирима последователно изваждат по две топки от кутията. Вероятността и четирима да извадят разноцветни топки е записана във вид на несъкратима дроб. Да се намери сумата на числителя и знаменателя на тази дроб.

Задача 7. Нека $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1} + \dfrac{n}{a_n}$ при $n \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че цялата част на $(a_n)^2$ е равна на n за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Задача 8. Даден е $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ABC = 2 \sphericalangle ACB$. Нека O е центърът на външновписаната окръжност към страната AC, а M е средата на BC. Правата OM пресича AC в точка D. Да се докаже, че $AB = AD$.