Математически турнир „Иван Салабашев“, 2014 г.
Решения на задачите от темата за 10-12 клас

1. Да се намери сумата от цифрите на всички естествени числа n, за които $\sum_{i=1}^{6}\left[\frac{n}{i!}\right] = 2014$.

<u>Отговор: 13.</u> Очевидно $S(n) = \sum_{i=1}^{6}\left[\frac{n}{i!}\right]$ е строго растяща функция на n. Следователно съществува най-много едно n, за което $S(n) = 2014$. Проверка показава, че $S(1174) = 2014$.

2. Квадрат K с размери 3×3 е разделен на 9 единични квадратчета. Във върховете на квадратчетата са записани числата от 1 до 16 така, че сумата на четирите числа върху всяка страна на K е равна на сумата S на четирите числа, записани във вътрешността на K. Да се намери най-голямата възможна стойност на S.

<u>Отговор: 38.</u> Като съберем петте суми, получаваме, че $5S = T + 1 + 2 + \cdots + 16 = T + 136$, където е сумата на числата в четирите върха на K. В частност, $T \equiv 4 \pmod 5$. Тогава лесно се вижда, че $T \leq 15 + 14 + 13 + 12 = 44$, т.е. $S \leq 38$. Тази стойност се достига, като например във вътрешността на K запишем числата 16, 6, 11, 5, а по страните, започвайки от връх на K, запишем последователно числата 15, 9, 1, 13, 8, 3, 14, 2, 10, 12, 4, 7.

3. Да се пресметне сумата $\cos^2 2^\circ + \cos^2 4^\circ + \cdots + \cos^2 88^\circ$.

<u>Отговор: 22.</u> Имаме, че

$$S = \cos^2 2^\circ + \cos^2 4^\circ + \cdots + \cos^2 88^\circ = 1 - \sin^2 2^\circ + 1 - \sin^2 4^\circ + \cdots + 1 - \sin^2 88^\circ$$

$$= 44 - \cos^2 88^\circ - \cos^2 86^\circ - \cdots - \cos^2 2^\circ = 44 - S$$

и следователно $S = 22$.

4. Да се намери броят на целите числа a, за което уравнението $x^3 - 13x = a$ има три различни цели корена.

<u>Отговор: 2.</u> Ако x_1, x_2, x_3 са корените на даденото уравнение, то

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0 + 2.13 = 26.$$

Сега не трудно да се се види, че, с точност до пермутация,

$$(|x_1|, |x_2|, |x_3|) = (0, 1, 5) \text{ или } (|x_1|, |x_2|, |x_3|) = (1, 3, 4).$$

Понеже $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, лесно следва, че корените са $1, 3, -4$ или $-1, -3, 4$. И така $a = \pm 12$.

5. Да се най-голямото двуцифрено число n такова, че 35 дели $5x^7 + 7x^5 + nx$ за всяко цяло число x.

<u>Отговор: 93.</u> Понеже $35 = 5.7$, $x^5 \equiv x \pmod 5$ и $x^7 \equiv x \pmod 7$, лесно следва, че $5|n + 7$ и $7|n + 5$. Оттук $n \equiv 23 \pmod{35}$ и значи $n = 93$.

6. В кутия има 5 бели и 5 черни топки. Четирима последователно изваждат по две топки от кутията. Вероятността и четирима да извадят разноцветни топки е записана във вид на несъкратима дроб. Да се намери сумата на числителя и знаменателя на тази дроб.

Отговор: 71. Възможните изходи са $\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2} = \frac{10!}{2^5}$, а благоприятните изходи са $5^2.4^2.3^2.2^2$. Следователно търсената вероятност е равна на $\frac{2^5}{\binom{10}{5}} = \frac{8}{63}$.

Задача 7. Нека $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{n}{a_n}$ при $n \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че цялата част на $(a_n)^2$ е равна на n за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Ще докажем исканото по индукция. При $n = 1$ това е вярно. Нека $[a_n^2] = n$ за някое $n \in \mathbb{N}$. За $f(x) = \frac{x}{n+1} + \frac{n}{x}$ директно се проверява, че $f(u) < f(v)$ при $0 < v < u$ и $uv < n(n+1)$. Тогава

$$a_{n+1} = f(a_n) > f(\sqrt{n+1}) = \sqrt{n+1}$$

и

$$a_{n+1} = f(a_n) \leq f(\sqrt{n}) = \sqrt{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \sqrt{n+2},$$

откъдето $[a_{n+1}^2] = n + 1$.

Оценяване. 3 т. за $a_n < \sqrt{n+1} \Rightarrow a_{n+1} > \sqrt{n+1}$ и 3 т. за $a_n \geq \sqrt{n} \Rightarrow a_{n+1} < \sqrt{n+2}$.

Задача 8. Даден е $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ABC = 2 \sphericalangle ACB$. Нека O е центърът на външновписаната окръжност към страната AC, а M е средата на BC. Правата OM пресича AC в точка D. Да се докаже, че $AB = AD$.

Решение. Нека $E = BO \cap AC$. Тогава $\sphericalangle EBC = \frac{\sphericalangle ABC}{2} = \sphericalangle ECB$, откъдето (1) $EB = EC$. Понеже $d(O, BC) = d(O, EC)$, то

$$(2) \quad \frac{OB}{OE} = \frac{S_{OBC}}{S_{OEC}} = \frac{BC}{EC}.$$

От друга страна, тъй като M е среда на BC, от теоремата на Менелай за $\triangle BEC$ и правата OM следва, че (3) $\frac{OB}{OE} = \frac{DC}{DE}$. От (1), (2) и (3) получаваме, че $\frac{BC}{BE} = \frac{DC}{DE}$, т.е. BD е ъглополовяща на $\sphericalangle EBC$. Тогава лесно следва, че $\sphericalangle ABD = \frac{3 \sphericalangle ABC}{4} = \sphericalangle BAD$, откъдето $AB = AD$.

Оценяване. 1 т. за (1), 1 т. за (2), 2 т. за (3), 1 т. за факта, че BD разполовява $\sphericalangle EBC$ и 1 т. за довършване на решението.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.