Математически турнир „Иван Салабашев“, 2014 г.

Решения на задачите от темата за 8-9. клас

1. Ако $f(3x) = \dfrac{3}{3+x}$ при $x > 0$, то $f(x)$ е равно на :

А) $\dfrac{1}{1+x}$ **Б)** $\dfrac{3}{3+x}$ **В)** $\dfrac{9}{9+x}$ **Г)** $\dfrac{27}{27+x}$

Отговор: В. Имаме $f(x) = f\left(3\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{3}{3+\dfrac{x}{3}} = \dfrac{9}{9+x}$.

2. Сумата на простите числа с ненулеви цифри и сума на цифрите 4 е равна на:

А) 250 **Б)** 255 **В)** 260 **Г)** 265

Отговор: Б. Тези прости числа са измежду нечетните числа с ненулеви цифри и сума на цифрите 4 : $13, 31, 121, 211, 1111$. От тях прости числа са $13, 31, 211$ и тяхната сума е 255.

3. Решенията на неравенството $|x-1| \geq |2x-1|$ образуват интервал с дължина:

А) $\dfrac{1}{3}$ **Б)** $\dfrac{2}{3}$ **В)** $\dfrac{3}{3}$ **Г)** $\dfrac{4}{3}$

Отговор: Б. Ако $x \leq \dfrac{1}{2}$, то $|x-1| = 1-x, |2x-1| = 1-2x$ и от даденото неравенство следва, че $x \geq 0$, т.е. $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$. Аналогично се вижда, че при $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$ следва, че $\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{2}{3}$, а при $x \geq 1$ неравенството няма решение. Следователно решенията на неравенството са всички числа от интервала $\left[0, \dfrac{2}{3}\right]$.

4. През 2013 г. чифт ски са стрували 200 лв, а скиорско яке 100 лв. През 2014 г. цената на чифт ски се увеличила с 5%, а цената на якето с 14%. Общата цена на ските и якето се е увеличила с:

А) 6% **Б)** 8% **В)** 10% **Г)** 12%

Отговор: Б. Цената на ските се е увеличила с $\dfrac{200.5}{100} = 10$ лв, а цената на якето се е увеличила с $\dfrac{100.14}{100} = 14$ лв. Общата им цена се е увеличила с 24 лв, т.е. с $\dfrac{24}{300} = 8\%$.

5. Нека A е сумата на първите 2015 нечетни естествени числа, а B е сумата на първите 2014 четни естествени числа. Разликата $A - B$ е равна на:

А) 2014 **Б)** 2015 **В)** 2.2014 **Г)** 2.2015

Отговор: Б. Имаме

$$A - B = 1 + 3 + \ldots (2.2014 + 1) - 2 - 4 - \cdots - 2.2014$$
$$= 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (2.2014 - 1) - 2.2014 + (2.2014 + 1)$$
$$= -2014 + 2.2014 + 1 = 2015.$$

6. Ако $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$, то стойността на израза $\dfrac{bc}{a^2} + \dfrac{ca}{b^2} + \dfrac{ab}{c^2}$ е равна на:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Отговор: В. От даденото равенство имаме $c = -\dfrac{ab}{a+b}$. Като заместим в дадения израз и преобразуваме получаваме, че неговата стойност е равна на 3.

7. В триъгълник ABC мерките на ъглите при върховете A, B, C се отнасят както $1 : 3 : 5$. Ако H е пресечната точка на височините на триъгълника, то $\sphericalangle CBH$ е равен на:

А) 5° **Б)** 10° **В)** 15° **Г)** 20°

Отговор: Б. Нека $\sphericalangle A = x, \sphericalangle B = 3x, \sphericalangle C = 5x$.Тогава $x + 3x + 5x = 180^\circ$, т.е. $x = 20^\circ$. Следователно $\sphericalangle A = 20^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, $\sphericalangle C = 100^\circ$. Тогава H е външна точка за триъгълника и $\sphericalangle CBH = \sphericalangle C - 90^\circ = 10^\circ$.

8. Нека p и q са различни прости числа, за които $\dfrac{p}{q} = \dfrac{q-63}{p-63}$. Тяхното произведение е равно на: **А)** 111 **Б)** 122 **В)** 123 **Г)** 134

Отговор: Б. Имаме $p(p-63) = q(q-63)$, откъдето $(p-q)(p+q) = 63(p-q)$. След съкращаване на $p-q \neq 0$ получаваме $p+q = 63$. Тъй като p и q са прости числа следва, че едно от тях е равно на 2(в противен случай сумата им е четно число) и значи другото число е 61. Следователно $pq = 2.61 = 122$.

9. Броят на целите числа n от 1 до 2014 включително, за които цифрата на десетиците на n^2 е нечетно число е равен на: **А)** 400 **Б)** 401 **В)** 402 **Г)** 403

Отговор: Г. Нека b е цифрата на десетиците на n, т.е. $n = 10a + b, a \geq 0$. Тогава от $n^2 - b^2 = 100a^2 + 20ab$ следва, че n има исканото свойство ако цифрата на десетиците на b^2 е нечетно число. С директна проверка се вижда, че това е в сила само при $b = 4, 6$. Броят на числата от 1 до 2014, завършващи на 4 или 6 е равен съответно на 202 и 201. Търсеният брой е 403.

10. Върху страните AC и BC на триъгълник ABC са взети съответно точки M и N. Отсечките AN и BM се пресичат в точка O и лицата на триъгълниците AOM, ABO и BON са съответно $1, 3$ и 6. Лицето на триъгълник ABC е равно на:

А) 36 **Б)** 38 **В)** 40 **Г)** 42

Отговор: А. Нека лицата на триъгълниците MON и MNC са съответно x и y. Тогава

$$\frac{ON}{OA} = \frac{x}{1} = \frac{6}{3},$$

откъдето $x = 2$. От друга страна

$$\frac{AM}{MC} = \frac{1+2}{y} = \frac{1+3}{6+2+y},$$

откъдето $y = 24$. Следователно лицето на триъгълник ABC е равно на $1 + 3 + 6 + 2 + 24 = 36$.

11. Нека $S_k = 1 + 2 + \cdots + k$ и

$$P_n = \frac{S_2}{S_2 - 1} . \frac{S_3}{S_3 - 1} \ldots . \frac{S_n}{S_n - 1}$$

за $n = 2, 3, 4, \ldots$. Да се намери най-голямото цяло число, което не надминава P_{2014}.

Отговор: 2. Тъй като $S_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ имаме $\dfrac{S_k}{S_k - 1} = \dfrac{k(k+1)}{(k-1)(k+2)}$. Следователно

$$P_n = \frac{2.3}{1.4} . \frac{3.4}{2.5} \ldots . \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}$$

и след съкращаване получаваме $P_n = \dfrac{3n}{n+2}$. Ясно е, че $2 < P_{2014} < 3$ и търсеното число е 2.

12. Числото $N = 100101\dots999$ се получава като се напишат всички трицифрени числа едно след друго. Най-голямото естествено число n, за което 3^n дели N е равно на:

Отговор: 2. Тъй като 27 дели $10^3 - 1 = 999$ следва, че N се дели на $3, 9, 27$ точно когато числото $S = 100 + 101 + \dots 999$ се дели съответно на $3, 9, 27$.(Защо?) Тъй като

$$S = 900\frac{100 + 900}{2} = 9.50.1099$$

се дели на 9, но не се дели на 27 следва, че $n = 2$.

13. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са цели числа, за които: 1) $-1 \le x_k \le 2, k = 1, 2, \dots, n$;
2) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 14$;
3) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 20$
Да се намери сумата на най-малката и най-голямата стойност на израза $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$.

Отговор: 46. Нека a, b и c са съответно броят на числата равни на $-1, 1$ и 2. Тогава $-a+b+2c = 14$ и $a + b + 4c = 20$. Оттук $a = 3 - c, b = 17 - 3c$ и $0 \le c \le 3$. Следователно

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = -a + b + 8c = 6c + 14$$

има най -малка стойност 14 и най-голяма стойност 32. Тяхната сума е 46.

14. Разглеждаме редицата $1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots$, в която естественото число n е записано n пъти. Да се намери сумата на числата, записани на 2014 и 2017 място.

Отговор: 127. Последното число n е записано на

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

място. Тъй като $\dfrac{63.64}{2} = 2016$ следва, че на 2014 място е записано числото 63, а на 2017 място е записано числото 64. Тяхната сума е 127.

15. Нека $n = 3^{20}5^{14}$. Да се намери броят на делителите на n^2, които са по-малки от n и не делят n.

Отговор: 280. Нека $n = p^r q^s$, където p и q са различни прости числа. Тогава числото $n^2 = p^{2r}q^{2s}$ има $(2r+1)(2s+1)$ делители. За всеки делител на n^2 по-малък от n има такъв, който е по-голям от n. Следователно има

$$\frac{(2r+1)(2s+1) - 1}{2} = 2rs + r + s$$

делители на n^2 по-малки от n. Тъй като n има $(r+1)(s+1)$ делители и те са делители n^2 следва, че търсеният брой делители на n^2 е равен на $2rs + r + s - ((r+1)(s+1) - 1) = rs$. При $r = 20, s = 14$ получаваме $rs = 280$.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.