Математически турнир „Иван Салабашев“, 2015 г.
Решения на задачите от темата за 10–12 клас

1. Даден е неравностранен остроъгълен триъгълник ABC. Правата през ортоцентъра H и центъра O на описаната окръжност пресича страните AC и BC в точки P и Q така, че $HP = OQ$. Да се намери $\sphericalangle ACB$.

Решение. Понеже $\sphericalangle ACH = \sphericalangle BCO$, от синусовата теорема следва, че

$$\frac{CP}{\sin\sphericalangle CHP} = \frac{HP}{\sin\sphericalangle HCP} = \frac{OQ}{\sin\sphericalangle OCQ} = \frac{CQ}{\sin\sphericalangle COQ},$$

откъдето

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{\sin\sphericalangle CHO}{\sin\sphericalangle COH} = \frac{CO}{CH}.$$

Аналогично $\dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{CH}{CO}$ и значи $CH = CO$. Понеже $CH = 2CO\cos\sphericalangle ACB$, следва, че $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

Забележка. Може да се докаже, че ако $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, то $HP = OQ$.

Оценяване. (6 т.) 1 т. за $\sphericalangle ACH = \sphericalangle BCO$, по 2 т. за всяко от равенствата $\dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{CO}{CH}$ и $\dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{CH}{CO}$, и 1 т. за $CH = 2CO\cos\sphericalangle ACB$.

2. Нека a е реален параметър. Да се докаже, че ако уравнението

$$(x^3 - ax)^3 - a(x^3 - ax) = x$$

има повече от 5 различни реални корена, то има 9 различни реални корена.

Решение. Ясно е, че $x = 0$ е корен на даденото уравнение $(*)$. При $x \neq 0$ полагаме $y = x^2 - a$ и получаваме

$$y^4 + ay^3 - ay - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y+1)(y^2 + ay + 1) = 0.$$

Оттук следва, че ако $(*)$ има повече от 5 различни реални корена, то $a > 2$. Тогава корените на $(*)$ са $0, \pm\sqrt{b_\pm}, \pm\sqrt{a \pm 1}$, където $b_\pm = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. Понеже $0 < b_- < a - 1 < b_+ < a + 1$, то при $a > 2$ $(*)$ има 9 различни реални корена.

Оценяване. (6 т.) 3 т. за $(y-1)(y+1)(y^2 + ay + 1) = 0$ и 3 т. за довършване на решението.

3. Да се намерят всички естествени числа x и y, за които $x^2 + y^2$ дели $x^3 - 2y$ и $y^3 - 2x$.

Решение. Нека p е просто число, $p^m | x$, $p^n | y$, но $p^{m+1} \nmid x$, $p^{n+1} \nmid y$. Можем да считаме, че $m \geq n \geq 0$. Тогава $p^{2n} | x^2 + y^2 | x^3 + 2y$, $p^{2n} | x^3$ и значи $p^{2n} | 2y$. Следователно $n = 0$ или $n = 1$, $p = 2$.
От друга страна, $x^2 + y^2 | x(x^2 + y^2) - (x^3 - 2y) = y(xy + 2)$.
Ако $n = 0$, то НОД$(x, y) = 1$ и значи $x^2 + y^2 | xy + 2$. В частност, $(x - y)^2 + xy \leq 2$, откъдето $x = y = 1$, което не е решение.
Ако $n = 1$, то НОД$(x, y) = 2$. Полагаме $x = 2u$, $y = 2v$ и получаваме, че $u^2 + v^2$ дели $2u^3 - v$ и $2v^3 - u$. Тогава $u^2 + v^2 | 2u(u^2 + v^2) - (2u^3 - v) = v(2uv + 1)$. Понеже $(u, v) = 1$, то $u^2 + v^2 | 2uv + 1$.

В частност, $(u-v)^2 \leq 1$, откъдето $u = v \pm 1$. И така, $(x, y) = (2k, 2k+2), (2k+2, 2k)$, $k \in \mathbb{N}$, които са решения.

Оценяване. (7 т.) 2 т. за НОД$(x, y) \leq 2$, 2 т. за НОД$(x, y) = 1$ и 3 т. за НОД$(x, y) = 2$.

4. Нека n е естествено число. Да се намери цялата част на числото

$$4\left(\sqrt{2^0(2^0+1)} + \sqrt{(2^1(2^1+1)} + \cdots + \sqrt{2^n(2^n+1)}\right).$$

Решение. Директно се проверява, че при $x > 0$ е в сила

$$0 < x + \frac{1}{2} - \sqrt{x(x+1)} < \frac{1}{8x}.$$

Следователно за даденото число S имаме

$$0 < \sum_{i=0}^{n}(2^{i+2}+2) - S < \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^{i+1}} < 1$$

и значи $[S] = 2^{n+3} + 2n - 3$.

Оценяване. (7 т.) 2 т. за $[S] \leq 2^{n+3} + 2n - 3$ и 5 т. за $[S] \geq 2^{n+3} + 2n - 3$.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.