Математически турнир „Иван Салабашев“, 2015 г.
Решения на задачите от темата за 6. клас

1. Сборът $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$ е записан като несъкратима дроб $\frac{p}{q}$. Колко е $p+q$?

А) 110 **Б)** 157 **В)** 193 **Г)** 211

<u>Отговор: В.</u> Имаме $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{2.4.5+3.3.5+4.3.4}{3.4.5}=\frac{133}{60}$, откъдето $p+q=193$.

2. Колко са несъкратимите дроби от вида $\frac{a}{b}$, за които $3\le a\le 8$ и $4\le b\le 7$?

А) 12 **Б)** 13 **В)** 14 **Г)** 15

<u>Отговор: Г.</u> Несъкратимите дроби са: $\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{5},\frac{4}{7},\frac{5}{4},\frac{5}{6},\frac{5}{7},\frac{6}{5},\frac{6}{7},\frac{7}{4},\frac{7}{5},\frac{7}{6},\frac{8}{5},\frac{8}{7}$.

3. По време на разпродажба телевизор от 840 лева се продава с 25% отстъпка. Колко процента трябва да бъде отстъпката на компютър от 750 лева, за бъде намалената му цена равна на намалената цена на телевизора?

А) 10 **Б)** 16 **В)** 18 **Г)** 22

<u>Отговор: Б.</u> Намалената цена на телевизора е $\frac{75}{100}.840=630$ лева. Това означава, че отстъпката на компютъра е $750-630=120$ лева. Тогава $\frac{x}{100}.750=120$, откъдето $x=16$.

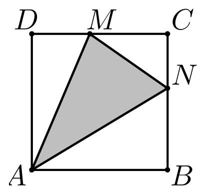
4. Всички двуцифрени числа от 16 до 27 включително са записани едно след друго и е получено едно 24-цифрено число: 161718192021222324252627. Кое е най-голямото естествено число n, за което числото 3^n дели това число?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

<u>Отговор: Б.</u> Като използваме, че остатътък при деление на 9 на едно число е равен на остатъка при деление на сбора от цифрите му с 9, получаваме, че остатъкат на даденито число при деление с 9 е равен на остатъка при деление на $S=16+17+\cdots+27$ с 9. Понеже $S=\frac{27.28}{2}-\frac{15.16}{2}$ е число, което се дели на 3, но не се дели на 9, то търсеното число е 1.

5. Квадрат $ABCD$ има страна 5 см. Точката M и N съответно от страните CD и BC са такива, че $DM=2$ см и лицето на триъгълника AMN е 46% от лицето на квадрата. Колко сантиметра е отсечката BN?

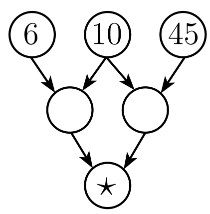
А) $0,5$ **Б)** 1 **В)** $1,5$ **Г)** 2



<u>Отговор: Б.</u> Лицето на триъгълника AMN е равно на $25-\frac{5}{2}-\frac{5x}{2}-\frac{3(5-x)}{2}=\frac{25}{2}-x$. Тогава $\frac{25}{2}-x=\frac{46}{100}.25=\frac{23}{2}$, откъдето $x=1$ см.

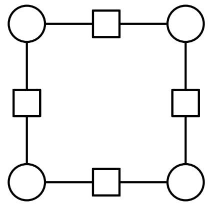
6. Във всяко празно кръгче Камен записва или НОД, или НОК на двете числа в кръгчетата над него. Кое число **не може** да се появи в кръгчето със звездичка?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 5



<u>Отговор: В.</u> Лесно се построяват примери, при които се получава 1, 2 или 5. Ако искаме да получим 3, числата във втория ред трябва да се делят на 3. Тогава и на двете места на втория ред трябва да запишем НОК на съответните числа, тогава числата във втория ред са 30 и 90 и на третия ред не може да се получи 3.

7. Дарин иска да запише във всяко кръгче 1 или -1, така че ако във всяко квадратче след това запише произведението на числата в двете му съседни кръгчета, то сборът на числата в четирите квадратчета да е равен на нула. По колко начина може да направи това Дарин?



А) 8 **Б)** 10 **В)** 12 **Г)** 14

Отговор: В. За да бъде сборът на числата равен на нула трябва да е изпълнено едно от следните условия: има три единици и една -1; има три -1 и една 1; има две съседни 1 и две съседни -1. Всеки от горните три случая дава по четири възможности за разположение на 1 и -1 в кръгчетата, общо 12 възможности.

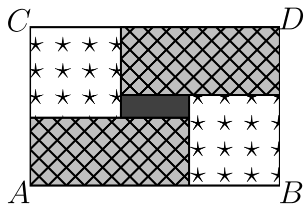
8. Димитър, Калоян, Филип и Георги изяли кутия бонбони. Най-напред Димитър изял $\frac{1}{5}$ от всички бонбони и още 3 бонбона, след това Калоян изял $\frac{1}{3}$ от останалите бонбони, след това Филип изял $\frac{1}{2}$ от останалите и още един бонбон и накрая Георги изял последните 6 бонбона. Кой изял най-много бонбони?

А) Димитър **Б)** Калоян

В) Филип **Г)** Георги

Отговор: А. Тръгвайки отзад напред получаваме, че Георги е изял 6 бонбона, Филип е изял 8 бонбона, Калоян е изял 7 бонбона, а Георги е изял 9 бонбона.

9. Правоъгълникът $ABCD$ е сглобен от две еднакви сиви плочки, две еднакви плочки на звездички и една черна плочка. Черната плочка има страни 1 дм и 3 дм, а обиколката на една сива плочка е 56 дм. Колко дециметра е обиколката на $ABCD$?



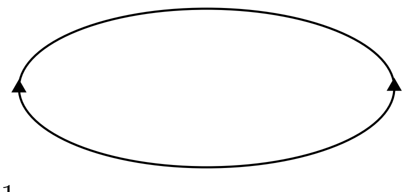
А) 100 **Б)** 104 **В)** 108 **Г)** 112

Отговор: В. Ако една сива плочка има размери x и y, то една плочка със звездички има размери $y-3$ и $x+1$. Следователно обиколката на плочка със звездички е равна на обиколката на сива плочка минус 4. Тогава обиколката на $ABCD$ е равна на сбора от обиколките на двете сиви плочки минус 4. Следователно обиколката е $2.56 - 4 = 108$ дм.

10. Мария, Мила, Иван и Петър изиграли турнир по шах, като всеки двама изиграли по две партии помежду си (за победа в шаха се дава 1 точка, за равен резултат по 0,5 точки и при загуба не се дават точки). Известно е, че: Мария се класирала на първо място с 5,5 точки; Петър бил последен с 1,5 точки; няма двама с равен брой точки. Колко точки има Мила, ако се е класирала на второ място? **А)** $2,5$ **Б)** 3 **В)** $3,5$ **Г)** 4

Отговор: Б. Общо партиите са 12 и следователно толкова са точките на всички състезатели. Точките на Мила и Иван са $12-5,5-1,5=5$. Понеже Мила има повече точки от Иван, тя има поне 3 точки. Ако тя има повече от 3 точки, то Иван ще има най-много 1,5. Тогава или Петър не е последен или Иван и Петър имат равен брой точки, противоречие с условието. Следователно Мила има 3 точки.

11. Иван и Петър тичат по кръгла писта, като тръгват от противоположни краища на пистата и тичат в противоположни посоки. Иван прави една обиколка за 10 минути, а Петър за 15 минути. Колко пъти са се разминали за 1 час тичане?



Отговор: 10. За 1 минута двамата общо изминават $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$ от една обиколка на пистата.

Следователно за 6 минути двамата общо пробягват една обиколка на пистата и първата им среща ще бъде след 3 минути. След това ще се срещат на всяка шеста минута. Срещите им ще бъдат при минути $6k + 3$ за $k = 0, 1, \dots, 9$, общо 10 срещи.

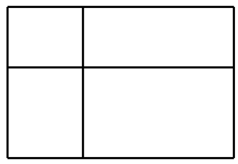
12. Кое е най-малкото естествено число, което има 15 делители, един от които е 6?

Отговор: 144. Числото има поне два прости делители – 2 и 3. Понеже $15 = 3.5$ е единственото представяне на числото 15 като произведение на две числа, всяко от които е по-голямо от 1, то числото има вида $2^{\alpha}.3^{\beta}$ където $(\alpha+1)(\beta+1) = 15$. Най-малко число се получава при $\alpha = 4$ и $\beta = 2$ и това число е $2^4.3^2 = 144$.

13. На дъската е записано числото 1. Ако на дъската е записано числото x, всяка минута Илина заменя това число с едно от числата $2x$ или $\dfrac{x+1}{3}$, ако това число е цяло (например, числото 4 може да се замени само с 8, докато числото 8 може да се замени както с 16, така и с 3). Най-малко след колко минути Илина може да получи числото 7?

Отговор: 13. Имаме $1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 11 \to 22 \to 44 \to 88 \to 176 \to 59 \to 20 \to 7$ или $1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 64 \to 128 \to 43 \to 86 \to 29 \to 10 \to 20 \to 7$.

14. Правоъгълник е разделен на 4 правоъгълника, както е показано на чертежа. Георги забелязал, че правоъгълниците са различни и дължините на страните им са цели числа в сантиметри. Два от тези четири правоъгълника имат лица, числено равни на техните периметри. Колко е лицето на големия правоъгълник?



Отговор: 70. Ако правоъгълник със страни a и b има лице, числено равно на неговия периметър, то $ab = 2(a+b)$. Това равенство може да се запише като $(a-2)(b-2) = 4$. Понеже $4 = 1.4 = 2.2$, то единствените възможности за a и b са двойките $4, 4$ и $6, 3$. Следователно два от правоъгълниците са със страни 4×4 и 6×3. Тези два правоъгълника не могат да имат обща страна и следователно страните на големия правоъгълник са $6 + 4 = 10$ и $3 + 4 = 7$. Неговото лице е $7.10 = 70$ кв. см.

15. Йоан записал всички четирицифрени числа, като използвал само цифрите 1, 2 и 3. Цветан иска да избере няколко от тези числа така, че всеки две от избраните числа да се различават в точно три позиции (например, числата 1223 и 3231 се различават в три позиции, докато 1111 и 1231 се различават в две позиции). Колко най-много числа може да избере Цветан?

Отговор: 9. Пример за 9 такива числа е: 1111, 1222, 1333, 2123, 2231, 2312, 3132, 3321, 3213. Да допуснем, че има повече от 9 такива числа. Понеже възможностите за първите две позиции са $3.3 = 9$, то от принципа на Дирихле следва, че има поне две числа, които съвпадат в първите две позиции. Тогава те могат да се различават най-много в другите две позиции, противоречие.

Задачите от тази тема са предложени от Емил Колев.