Математически турнир „Иван Салабашев“, 2015 г.
Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Колко на брой са целите числа, които са не по-малки от $\dfrac{3}{7}-\dfrac{7}{3}$ и не по-големи от $\dfrac{11}{7}+\dfrac{7}{3}$?

А) 5 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** 8

Отговор: А. Тъй като $\dfrac{3}{7}-\dfrac{7}{3}=-\dfrac{40}{21}\in(-2,-1)$ и $\dfrac{11}{7}+\dfrac{7}{3}=\dfrac{82}{21}\in(3,4)$, интересуващите ни цели числа са $-1,0,1,2,3$ и техният брой е 5.

2. Ако m и n са естествени числа, за които $\dfrac{14^m(3^4-5^2)}{2(18^2+18+1)^3}=2^{12}7^n$, да се намери $m+n$.

А) 10 **Б)** 6 **В)** 14 **Г)** 12

Отговор: Г. От даденото равенство следва, че $2^{m+2}7^{m-8}=2^{12}7^n$, откъдето $m+2=12$, $m-8=n$ и $m+n=12$.

3. Ако $a-b=5$, на колко е равно a^2-b^2-10b?

А) 0 **Б)** 10

В) 25 **Г)** не може да се определи

Отговор: В. Имаме последователно $a^2-b^2-10ab=(a-b)(a+b)-10b=5a+5b-10b=5(a-b)=25$.

4. В един град живеят рицари, които винаги казват истината, и лъжци, които винаги лъжат. Трима жители на града пътували заедно в метрото и на една спирка всеки от тях казал по две твърдения: „Това е спирка M. Следващата спирка е N“, казал първият, „Това е спирка N. Предишната спирка беше K“, казал вторият, а третият казал „Предишната спирка беше K. Тази спирка е M“. Колко от тези трима жители са рицари?

А) не може да се определи **Б)** 0

В) 1 **Г)** 2

Отговор: Б. Не е възможно вторият и третият едновременно да са рицари, защото те си противоречат за настоящата спирка. Тогава твърдението за предишната спирка K е лъжа и всъщност и двамата са лъжци. Оттук следва, че твърдението за настоящата спирка M е лъжа и значи и първият пътник е лъжец.

5. За колко различни цели стойности на n числото $\dfrac{3n+40}{n-4}$ е цяло?

А) 0 **Б)** 6 **В)** 10 **Г)** 12

Отговор: Г. Тъй като $A=\frac{3n+40}{n-4}=3+\frac{52}{n-4}$, цели A се получават точно когато $n-4$ е делител на 52, т.е. когато $n-4=\pm1,\pm2,\pm4,\pm13,\pm26,\pm52$.

6. Върху права са нанесени точки A, B, C, D, E и F в този ред отляво надясно, като $AB=BC=6$, $CD=DE=5$ и $EF=4$. Колко е разстоянието между средите на отсечките AB и EF?

А) 0 **Б)** 21

В) 22 **Г)** не може да се определи

Отговор: Б. Търсеното разстояние е равно на

$$\frac{AB}{2}+BC+CD+DE+\frac{EF}{2}=3+6+5+5+2=21.$$

7. Колко са естествените числа, които делят 9000 и не са точни квадрати?

А) 36 **Б)** 40 **В)** 42 **Г)** 48

Отговор: Б. Тъй като $9000 = 2^3.3^2.5^3$, общият брой на делителите на 9000 е $(3+1)(2+1)(3+1) = 48$. От тях точни квадрати са тези, за които степенните показатели в каноничното им разлагане са четни, т.е. 0 или 2. Имаме $2.2.2 = 8$ възможности за избор на делители с три четни показателя, т.е. 8 точни квадрата. Следователно търсеният брой е $48 - 8 = 40$.

8. Колко са естествените числа, по-малки от 100000, които завършват на 37 и се делят на 37?

А) 20 **Б)** 26 **В)** 27 **Г)** 28

Отговор: Г. Ако n е едно от разглежданите числа, то $n - 37$ също се дели на 37 и завършва на 00, като $-36 \leq n \leq 99963$. Освен това числото $m = \frac{n-37}{100}$ е цяло, също се дели на 37 и $0 \leq m \leq 999$. Обратно, от m можем да конструираме n с исканите свойства. Следователно търсеният брой е равен на броя на неотрицателните цели числа, ненадминаващи 999, които се делят на 37, т.е. на $\frac{999}{37} + 1 = 28$.

9. По окръжност са написани 17 числа с обща сума 200. Известно е, че сумата на кои да е 4 съседни числа е поне 43. Колко най-много може да бъде най-голямото число на окръжността?

А) 28 **Б)** 33 **В)** 27 **Г)** 34

Отговор: А. Нека A е най-голямото число по окръжността и да разделим останалите 12 числа на 4 групи от по 4 последователни числа. Тогава сумите в тези четворки са поне по 43 и за A остава най-много $200 - 4.43 = 28$. Пример за разположение с най-голямо число 28 е $28, 10, 11, 11, 11, 10, \ldots$.

10. Едно естествено число се нарича *важно*, ако сумата от цифрите му е просто число. Колко най-много измежду 5 последователни естествени числа могат да бъдат важни?

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5

Отговор: В. Не е възможно и петте числа да са важни, защото поне две имат четна сума на цифрите и най-много една от тези две четни суми е 2. Пример за 4 важни измежду 5 последователни е 199, 200, 201 и 203.

11. Известно е, че шестте ъгъла на триъгълниците ABC и KLM могат да се разпределят в три двойки така, че във всяка двойка да има по един ъгъл от всеки от двата триъгълника и сумата или разликата на ъглите във всяка двойка да е 90°. Единият от двата триъгълника е остроъгълен. Каква е градусната мярка на най-големият от шестте ъгъла?

Отговор: 135°. Нека $\triangle ABC$ е остроъгълен. Ако и $\triangle KLM$ е остроъгълен, сумите в трите двойки са по 90° и значи общата сума на шестте ъгъла е 270°, което е невъзможно. Нека $\sphericalangle K$ е тъп, а останалите пет ъгъла са остри. Тогава можем да считаме, че $\sphericalangle K - \sphericalangle A = 90^\circ$ и $\sphericalangle L + \sphericalangle B = \sphericalangle M + \sphericalangle C = 90^\circ$. Получаваме $180^\circ = \sphericalangle K + \sphericalangle L + \sphericalangle M = 90^\circ + \sphericalangle A + 90^\circ - \sphericalangle B + 90^\circ - \sphericalangle C = 270^\circ + 2\sphericalangle A - (\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C) = 90 + 2\sphericalangle A$, откъдето $\sphericalangle A = 45^\circ$ и $\sphericalangle K = 135^\circ$.

12. Естествените числа a и b има най-голям общ делител d и най-малко общо кратно M. Известно е, че $10(M - d) = ab$. Колко такива двойки (a, b) са възможни?

Отговор: 8. Тъй като d дели M, можем да запишем $M = kd$, където k е естествено число. Оттук и от известното равенство $Md = ab$ имаме $10(kd - d) = kd^2$, т.е. $10(k-1) = kd$. Следователно k е делител на 10 и $k > 1$. Получаваме двойките $(k, d) = (2, 5), (5, 8)$ и $(10, 9)$, като съответните възможности за M са 10, 40 и 90, а за ab имаме 50, 320 и 810. При $ab = 50$, $a > b \geq d = 5$ получаваме единствено $(a, b) = (10, 5)$. При $ab = 320$, $a > b \geq d = 8$ получаваме единствено

$(a, b) = (40, 8)$. При $ab = 810$, $a > b \geq d = 9$ получаваме две решения $(a, b) = (90, 9)$ и $(45, 18)$. Следователно интересуващите ни двойки са 8 на брой.

13. Даден е правилен n-ъгълник M, $n \geq 3$. Николай преброил триъгълниците с върхове измежду върховете на M, които нямат обща страна с M. Въпреки че сбъркал при броенето, той правилно установил, че въпросният брой е трицифрено число, което е по-малко от 150. Да се намери n.

Отговор: 12. Общият брой на триъгълниците с върхове измежду върховете на M е $\binom{n}{3}$. Тези, които имат обща страна с M, са $n(n-2) - n$ (страната може да се избере по n начина, а третият връх по $n - 2$ начина, като така n триъгълника с две общи страни с M са броени по два пъти). Следователно правилният отговор от броенето на Николай е трябвало да бъде $A = \binom{n}{3} - n(n-3) = \frac{n(n^2-9n+20)}{6}$. Числото A е положително при $n \geq 6$ и расте, защото и двата множителя в числителя растат. Тъй като $A = 77$ при $n = 11$, $A = 112$ при $n = 12$ и $A = 156$ при $n = 13$, търсената стойност на n е 12.

14. Колко са естествените числа x, ненадминаващи 1000, за които $x^2 - x$ се дели на 2015?

Отговор: 4. Очевидно $x = 1$ е едно от решенията. Тъй като $2015 = 5.13.31$, при $2 \leq x \leq 1000$ едно от числата x и $x - 1$ трябва да се дели на две от простите числа 5, 13 и 31, а другото да се дели на третото. Ако x или $x - 1$ се делят на $13.31 = 403$, възможностите са две – 403 и 806, като само $x = 806$ дава решение. Ако x или $x - 1$ се делят на $5.31 = 155$, възможностите са шест – 155, 310, 465, 620, 775 и 903, като само $x - 1 = 155$ дава решение. Ако x или $x - 1$ се делят на $5.13 = 65$, възможностите са петнадесет – 65, 130, 195, 260, 325, 390, 455, 520, 585, 650, 715, 780, 845, 910 и 975, като само $x - 1 = 650$ дава решение. Окончателно, търсеният брой е 4.

15. В кафене 37 студенти по информатика и по математика пият кафе и чай. Известно е, че студентите по информатика лъжат, когато пият кафе, и казват истината, когато пият чай, а студентите по математика обратно – лъжат, когато пият чай, и казват истината, когато пият кафе. На въпроса „Кафе ли пиете?“ с „Да“ отговорили 20 студента, а на въпроса „Вие математика ли следвате?“ с „Да“ отговорили 12 студента. След малко в кафенето влязал ученик и казал „Навън вали дъжд!“, с което се съгласили 16 студента (всички са знаели дали вали или не). Колко студенти по информатика са пиели чай в този момент?

Отговор: 13. Да означим съответно с I_c, I_t, M_c и M_t студентите по информатика и математика, които са пиели кафе или чай. От условието следват равенствата $I_c + I_t + M_c + M_t = 37$ (общ брой), $M_c + M_t = 20$ (от отговора на въпроса за кафето) и $I_c + M_c = 12$ (от отговора на въпроса за следването на математика). Ако навън наистина е валяло дъжд, то $I_t + M_c = 16$ и получаваме $3M_c + M_t + I_c + I_t = 48$, откъдето $2M_c = 48 - 37 = 11$, противоречие. Следователно навън не вали дъжд и $I_c + M_t = 16$. Сега достигаме до $2(M_c + M_t + I_c) = 48$, откъдето $M_c + M_t + I_c = 24$ и значи $I_t = 37 - 24 = 13$.

Задачите от тази тема са предложени от Петър Бойваленков.