Математически турнир „Иван Салабашев“, 2015 г.
Решения на задачите от темата за 8-9. клас

1. Едната страна на правоъгълник с периметър 60 е два пъти по-дълга от другата страна. Лицето на правоъгълника е равно на: **А)** 100 **Б)** 150 **В)** 200 **Г)** 250

Отговор: В. Нека страните на правоъгълника са x и $2x$. Тогава $6x = 60$, т.е. $x = 10, 2x = 20$ и лицето на правоъгълника е $10.20 = 200$.

2. Броят на естествените числа между 2000 и 4000, които се делят едновременно на 9 и 12 е равен на: **А)** 46 **Б)** 56 **В)** 66 **Г)** 76

Отговор: Б. Първото и последното естествено число между 2000 и 4000, които се делят на 9 и 12 (т.е. на 36) са $2016 = 36.56$ и $3996 = 36.111$. Търсеният брой е равен на $111 - 55 = 56$.

3. Броят на различните решения на уравнението $|||x| + 2016| - 2015| = 1$ е равен на: **А)** 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Отговор: А. Тъй като $|a| \geq 0$ и $|a| = a$ при $a \geq 0$, то

$$|||x| + 2016| - 2015| = ||x| + 2016 - 2015| = |x| + 1.$$

Следователно уравнението е еквивалентно на $|x| = 0$ и има единствено решение $x = 0$.

4. На Новогодишна разпродажба в книжарница книгите се продават с 20% намаление. Петър използвал купон и купил книга на $\dfrac{3}{4}$ от намалената цена, като платил 9 лв. Колко лева е оригиналната цена на книгата, купена от Петър? **А)** 10 **Б)** 15 **В)** 20 **Г)** 25

Отговор: Б. Нека оригиналната цена на книгата е x лв. Тази цена е намалена с 20% и става $x - \dfrac{20}{100}x = \dfrac{4}{5}x$. Тогава с купон цената на книгата е $\dfrac{3}{4}.\dfrac{4}{5}x = \dfrac{3}{5}x$. Следователно $\dfrac{3}{5}x = 9$ и първоначалната цена на книгата е 15 лв.

5. Нека a, b, c са реални числа, за които $a \neq b$ и е изпълнено равенството $a^2(b + c) = b^2(a + c) = 2015$. Числото $c^2(a + b)$ е равно на: **А)** -2015 **Б)** 0 **В)** 2000 **Г)** 2015

Отговор: Г. Имаме $a^2(b + c) - b^2(a + c) = ab(a - b) + (a^2 - b^2)c = (a - b)(ab + bc + ca) = 0$. Следователно $ab + bc + ca = 0$ и умножавайки с $a - c$ получаваме $a^2(b + c) - c^2(a + b) = 0$, т.е. $c^2(a + b) = a^2(b + c) = 2015$.

6. Нека ABC е остроъгълен триъгълник с $\sphericalangle BAC = 45^\circ$, D е петата на височината през върха C и P е вътрешна точка за височината CD, за която $AP = BC$. Ъгълът между правите AP и BC равен на:

А) 30° **Б)** 45° **В)** 60° **Г)** 90°

Отговор: Г. Нека E е пресечната точка на правите AP и BC. От $AD = CD$ следва, че триъгълниците PAD и BCD са еднакви. Тогава $\sphericalangle DCB = \sphericalangle BAE$ и $\sphericalangle AEB = \sphericalangle BDC = 90^\circ$.

7. Сумата на естествените числа k, за които числото $10 + k$ дели числото $10 + k^2$ е равна на: **А)** 128 **Б)** 138 **В)** 148 **Г)** 158

Отговор: Г. Тъй като $10 + k^2 = 110 + (k - 10)(k + 10)$, то k има исканото свойство точно когато $k + 10$ дели $110 = 2.5.11$. Оттук $k + 10 = 11, 22, 55, 110$, т.е. $k = 1, 12, 45, 100$ и търсената сума е равна на 158.

8. Нека p и q са взаимнопрости естествени числа и $d > 1$ е общ делител на числата $3p - q$ и $5p + 2q$. Числото d е равно на: **А)** 5 **Б)** 7 **В)** 11 **Г)** 19

Отговор: В. Тъй като $d > 1$ дели числата $2(3p-q)+(5p+2q) = 11p$ и $3(5p+2q)-5(3p-q) = 11q$ следва, че $d = 11$, защото p и q са взаимнопрости числа. Този общ делител се получава например при $p = 4$, $q = 1$.

9. Върху страните AB и AD на успоредник $ABCD$ са взети съответно вътрешни точки E и F. Нека K е пресечната точка на отсечките DE и FC, L е пресечната точка на отсечките DE и BF, и M е пресечната точка на отсечките FB и EC. Отношението $\dfrac{S_{EML} + S_{DKC}}{S_{FLK} + S_{MBC}}$ е равно на:

А) 1 **Б)** 2 **В)** $\dfrac{1}{2}$ **Г)** $\dfrac{1}{3}$

Отговор: А. Имаме $S_{EML} + S_{DKC} = S_{DCE} - S_{KLMC} = \frac{S_{ABCD}}{2} - S_{KLMC}$. Аналогично

$$S_{FLK} + S_{MBC} = S_{BCF} - S_{KLMC} = \frac{S_{ABCD}}{2} - S_{KLMC}$$

и даденото отношение е равно на 1.

10. Ако p, $3p + 2$, $7p + 6$, $9p + 8$ и $11p + 10$ са прости числа , то числото $6p + 11$ е:

А) просто **Б)** съставно

В) точен квадрат **Г)** кратно на 11

Отговор: Б. Нека l е остатъкът на p при деление на 5 , т.е. $p = 5k + l, l = 0, 1, 2, 3, 4$. Ако $l = 0$, то $p = 5$ и $11p + 10 = 65$ не е просто число. При $l = 1, 2, 3$ съответно числата $3p + 2, 7p + 6, 9p + 8$ се делят на 5 и не са прости. Следователно $p = 5k + 4$ и $6p + 11 = 5(6k + 7)$ е съставно число. Това число не се дели на 11, защото в противен случай $p = 11$ и $3p + 2 = 35$ не е просто число. То не е точен квадрат, защото дава остатък 2 при деление на 3. Да отбележим, че при $p = 19$ дадените числа са прости.

11. Нека ABC е правоъгълен триъгълник с $\sphericalangle ACB = 90^o$, $\sphericalangle BAC = 30^o$ и хипотенуза $AB = 10$. Нека D е вътрешна точка за триъгълника, за която $\sphericalangle BDC = 90^o$ и $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DBA$. Ако E е пресечната точка на правите AB и CD да се намери дължината на отсечката AE.

Отговор: 5. Имаме $BC = \dfrac{1}{2}AB = 5$. От друга страна

$$\sphericalangle ACE + \sphericalangle BCE = 90^o = \sphericalangle BCE + \sphericalangle CBD,$$

т.е. $\sphericalangle ACE = \sphericalangle CBD$. Следователно $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DBE$ и BD е ъглополовяща и височина в $\triangle CBE$ и $CB = BE$. Тъй като $\sphericalangle EBC = 60^o$ следва, че този триъгълник е равностранен. Тогава $EB = BC = 5$ и $AE = AB - BE = 5$.

12. Да се намери броят на двойките естествените числа (x, y), за които числото $\dfrac{xy^2}{x + y}$ е просто.

Отговор: 2. Нека x, y са естествени числа и p е просто число, за което $\dfrac{xy^2}{x + y} = p$. Нека $d = (x, y)$ и $x = ad, y = bd$, $(a, b) = 1$. След заместване и съкращаване горното равенство приема вида $d^2ab^2 = p(a + b)$. Тъй като b^2 и $a + b$ са взаимно-прости числа следва, че b^2 дели p, т.е. $b = 1$ и $d^2a = p(a + 1)$. Сега a и $a + 1$ са взаимно-прости и a дели p, т.е. $a = 1$ или $a = p$. В първия случай $d^2 = 2p$, откъдето $p = 2, d = 2$ и $x = y = 2$. Нека $a = p$. Тогава $d^2 = p + 1$, т.е. $p = (d - 1)(d + 1)$. Тъй като $d - 1 < d + 1$ следва,че $d - 1 = 1, d + 1 = p$ и получаваме $d = 2, p = 3, x = 6, y = 2$.

13. На колко най-много нули може да завършва число от вида $3^n + 1, n = 1, 2, \ldots$.

Отговор: 1. Числото $3^2 + 1 = 10$ завършва на една нула. Число от вида $3^n + 1$ не може да завършва на повече от една нула, защото в противен случай n е нечетно число (при четно n числото $3^n = (4-1)^n$ дава остатък 1 при деление 4 и $3^n + 1$ не се дели на 4) и ако $n = 2k+1$, то в зависимост от четността на k, числото $3^n + 1 = 3.9^k + 1 = 3.(10-1)^k + 1$ дава остатък 4 или 8 при деление на 10 и не се дели на 10.

14. Да се намери най-голямото естествено число k, за което съществува естествено число n такова, че всички числа $(n+1)2^n, (n+2)2^{n+1}, \ldots, (n+k)2^{n+k-1}$ са точни квадрати.

Отговор: $k = 2$. При $k = 2$ и $n = 7$ условието е изпълнено, защото в този случай числата $8.2^7 = 2^{10} = 32^2$ и $9.2^8 = 48^2$ са точни квадрати. Сега ще покажем, че $k \leq 2$. Да допуснем, че за някое естествено число n числата $(n+1)2^n$ и $(n+3)2^{n+2}$ са точни квадрати. Ако n е четно число, то 2^n и 2^{n+2} са точни квадрати и значи $n+1$ и $n+3$ са точни квадрати, което е невъзможно.(Докажете!) Нека сега $n = 2k+1, k \geq 0$ е нечетно число. Тогава $(n+1)2^n = (k+1)2^{2k+2}$ и $(n+3)2^{n+2} = (k+2)2^{2k+4}$ са точни квадрати. Тъй като 2^{2k+2} и 2^{2k+4} са точни квадрати, то $k+1$ и $k+2$ са точни квадрати, което е невъзможно.

15. Да се намери броят на естествените числа, чиято разлика с произведението на цифрите им (в десетичния запис) е равна на сумата на цифрите им.

Отговор: 9. Нека $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ е n-цифрено число с исканото свойство. Очевидно $n \geq 2$ и да допуснем, че $n \geq 3$. Тогава

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_1a_2\ldots a_n = \overline{a_1a_2\ldots a_n} =$$

$$= a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1}10 + a_n \geq$$

$$\geq a_1 10^{n-1} + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

което е еквивалентно на неравенството $1 + a_2\ldots a_n \geq 10^{n-1}$. Това е противоречие, защото при $n \geq 3$ имаме $1 + a_2\ldots a_n \leq 1 + 9^{n-1} < 10^{n-1}$. Следователно разглежданите числа са двуцифрени и нека числото $\overline{a_1a_2}$ изпълнява условието. Тогава

$$10a_1 + a_2 = \overline{a_1a_2} = a_1a_2 + a_1 + a_2,$$

откъдето $a_2 = 9$. Окончателно, числата с исканото свойство са $19, 29, \ldots, 99$ и техният брой е 9.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.