

Математически турнир „Иван Салабашев“, 2016 г.

Решения на задачите от темата за 5. клас

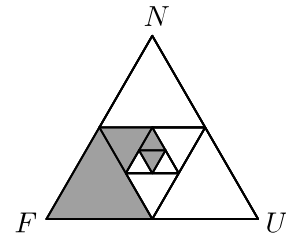
1. Коя от изброените дроби е най-голяма?

А) $\frac{2+0}{1+6}$ Б) $\frac{2+0}{16}$ В) $\frac{20}{1+6}$ Г) $\frac{20}{16}$

Отговор: В.

2. Каква част от триъгълника FUN на чертежа е оцветена?

А) $\frac{11}{32}$ Б) $\frac{21}{64}$ В) $\frac{1}{3}$ Г) $\frac{5}{16}$



Отговор: А.

3. Последната цифра в шестцифреното число $2016*\heartsuit$ е скрита с \heartsuit , а цифрата $*$ може да се мени. Ако $*$ е 3, числото се дели на 4, а ако $*$ е 4, числото се дели на 3. Колко е \heartsuit ?

А) 8 Б) 6 В) 4 Г) 2

Отговор: Г.

4. Изрязах 57 свещички и 75 звездички и украсих еднакво няколко елхички. Останаха ми 3 свещички и 3 звездички. Най-много колко са украсените елхички?

А) 6 Б) 9 В) 18 Г) 24

Отговор: В.

5. Ако $a \otimes b = 3 \cdot a + b : 2$, за кое число x имаме $20 \otimes (16 \otimes x) = 100$?

А) 16 Б) 32 В) 64 Г) 128

Отговор: В.

6. Колко са естествените числа, които делят 40, 48 или 60?

А) 14 Б) 17 В) 20 Г) 30

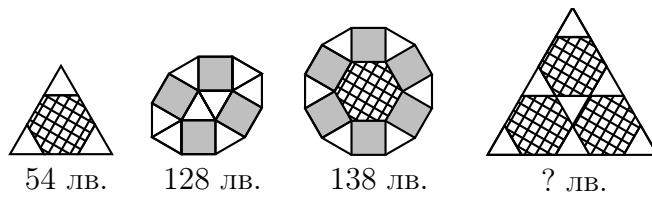
Отговор: Б. Делителите на 40 са 8 на брой, на 48 са 10, на 60 са 12. Общите делители на 40 и 48 са 4 на брой, на 40 и 60 са 6, на 48 и 60 са 6. Общите делители и на трите числа са 3 на брой. Числата, които делят 40 или 48 или 60 са $8 + 10 + 12 - (4 + 6 + 6) + 3 = 17$.

7. Колко е сборът на всички правилни несъкратими дроби, произведението на числителя и знаменателя на всяка от които е равно на 300?

А) $\frac{169}{300}$ Б) $\frac{77}{150}$ В) $\frac{43}{75}$ Г) $\frac{17}{30}$

Отговор: Г. Търсеният сбор е $\frac{1}{300} + \frac{3}{100} + \frac{4}{75} + \frac{12}{25} = \frac{17}{30}$.

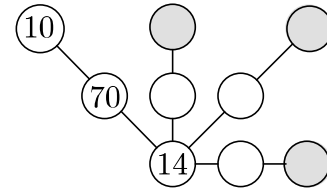
8. Фирма предлага триъгълни, квадратни и шестоъгълни плочи. Цената на плочите зависи от вида им. С плочите са наредени различни фигури, цената на три от които е известна.



Колко лева струва четвъртата фигура? А) 138 Б) 144 В) 150 Г) 156

Отговор: А. От втората фигура намираме, че квадрат и два триъгълника струват $128 : 4 = 32$ лв. Като ставним първата и третата фигура, получаваме, че 6 квадрата и 3 триъгълника струват $138 - 54 = 84$ лв, значи 2 квадрата и триъгълник струват $84 : 3 = 28$ лв. Тогава квадрат и триъгълник са общо $(32 + 28) : 3 = 20$ лв. Намираме цената на квадрата $28 - 20 = 8$ лв, на триъгълника $32 - 20 = 12$ лв. и на шестоъгълника $54 - 3 \cdot 12 = 18$ лв. Оттук четвъртата фигура струва $3 \cdot 18 + 7 \cdot 12 = 138$ лв.

9. Всички числа в кръгчетата на схемата трябва да са различни и двуцифрени, като числото в средата на всяка отсечка е равно на най-малкото общо кратно на двете числа в краищата ѝ. По това правило в средата на отсечката с краища 10 и 14 е записано $\text{НОК}(14, 10) = 70$. Колко е сборът на числата в оцветените кръгчета?

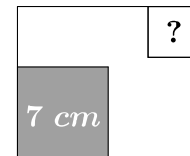


А) 82 Б) 84 В) 96 Г) 117

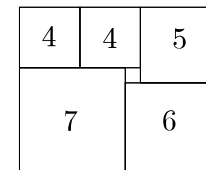
Отговор: А. В средите на отсечките са записани кратни на 14 двуцифрени числа (различни от 14 и 70); те са три от числата 28, 42, 56, 84 и 98. Ако $\text{НОК}(14, a) = 28$, различното от 28 число a е 4, но не е двуцифрено. Ако $\text{НОК}(14, a) = 42$, различното от 42 двуцифрено число a е 21. Ако $\text{НОК}(14, a) = 56$, различното от 56 число a е 8, но не е двуцифрено. Ако $\text{НОК}(14, a) = 84$, различното от 84 двуцифрено число a е 12. Ако $\text{НОК}(14, a) = 98$, различното от 98 двуцифрено число a е 49. Сборът на числата в оцветените кръгчета е $21 + 12 + 49 = 82$.

10. От шест квадрата със страни съответно 1 см, 4 см, 4 см, 5 см, 6 см и 7 см е сглобен правоъгълник. Квадратът със страна 7 см е поставен в долния ляв ъгъл на правоъгълника. Колко сантиметра е страната на квадрата в горния десен ъгъл?

А) 1 Б) 4 В) 5 Г) 6



Отговор: В. Правоъгълникът има лице, равно на сбора от лицата на квадратите: $2 \cdot 16 + 1 + 25 + 36 + 49 = 143$. Тъй като $143 = 11 \cdot 13$, то правоъгълникът има страни 11 и 13. Оттук лесно намираме покритието.



11. Намислих дроб, в която сборът на числителя и знаменателя е 2016. Забелязах, че ако към числителя прибавя 20, а от знаменателя извадя 16, ще получа дроб, която е равна на $\frac{1}{3}$. Колко е знаменателят на дробта, която намислих?

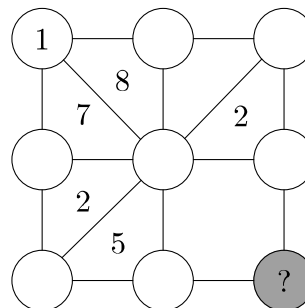
Отговор: 1531. Като прибавя 20 към числителя и извадя 16 от знаменателя на дадената дроб, сборът на числителя и знаменателя ще стане $2016 + 20 - 16 = 2020$. В новата дроб знаменателят е 3 пъти по-голям от числителя и тъй като сборът им е 2020, то числителят е $2020 : 4 = 505$, а знаменателят е 1515 . Дробта е с числител $505 - 20 = 485$ и знаменател $1515 + 16 = 1531$.

12. Естествено число, което има точно 6 делители, наричаме *отлично*. Например, числото 20 е отлично, защото делителите му са 6 на брой (1, 2, 4, 5, 10 и 20).

Колко отлични числа са делители на 2016?

Отговор: 5. Тъй като $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, отличните му делители са $2^5 = 32$, $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^2 \cdot 7 = 28$, $3^2 \cdot 2 = 18$, $3^2 \cdot 7 = 63$.

13. В кръгчетата на схемата трябва да се запишат естествените числа от 1 до 9 така, че най-голямата разлика между две числа във върховете на един триъгълник да е равна на числото вътре в този триъгълник. Кое е числото в оцветеното кръгче?



Отговор: 3. Първо да отбележим, че във върховете на триъгълник с разлика 2 са записани три последователни числа. Числото в средата на схемата участва в две тройки последователни числа, значи е от 3 до 7. В един от върховете на триъгълника, в който е записана разлика 8, е числото 9. Девет не е в средата на схемата, т.е. мястото на 9 е определено еднозначно. По същия начин се определя мястото на 8 в триъгълника с разлика 7. Следователно двете тройки последователни числа в триъгълниците с разлика 2 са 8, 7, 6 и 6, 5, 4. В два от върховете на триъгълника с максимална разлика 5 са 6 и 7, значи в третия е 2. Оставащото число 3 е записано в оцветеното кръгче.

14. В Хогоуртс се провел следният разговор.

Хари Потър: Възрастта на професор Дъмбълдор се дели на 6. *Хърмаяни:* Възрастта му е кратна на 20. *Рон:* Професорът е на възраст, кратна на 15. *Джини:* Възрастта му се дели на 50. *Невил:* Възрастта на професора се дели на 30. Само две от предположенията са верни. Най-малко на колко години е Дъмбълдор?

Отговор: 100. Четири от предполагаемите делители се делят на 2, значи възрастта на професора се дели на 2. По същия начин, четири от предполагаемите делители се делят на 5, значи възрастта на професора се дели на 5. Ако тази възраст се дели и на 3, Хари Потър, Рон и Невил са направили верни предположения, което е невъзможно. Следователно възрастта не се дели на 3. Тогава верните предположения са на Хърмаяни и Джини. Следователно възрастта на професора е най-малко $\text{НОК}(20, 50) = 100$.

15. В турнир по футбол участвали 4 отбора, като всеки два отбора изиграли по една среща. Отборът, който се класирал на последно място, събрал 7 пъти по-малко точки, отколкото първите три отбора. Колко от срещите са завършили наравно?

(Във футбола за победа са дават 3 точки, за равен резултат по една точка на двата отбора и за загуба – 0 точки.)

Отговор: 2. В турнира са изиграни $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ мача. Общо точките на всички отбори са най-малко $6 \cdot 2 = 12$ и най-много $6 \cdot 3 = 18$. Ако последният отбор има x точки, то първите три отбора имат $7 \cdot x$ точки, т.е. общо точките са $8 \cdot x$. Единственото число между 12 и 18, което се дели на 8, е 16. Оттук получаваме, че равните срещи са $18 - 16 = 2$. Таблицата показва, че такава ситуация е възможна.

x	3	3	1
0	x	3	1
0	0	x	3
1	1	0	x

Задачите от тази тема са предложени от Невена Събева.