Математически турнир „Иван Салабашев“, 2016 г.

Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Стойността на израза $\dfrac{(-6)^3.10^7}{2^8.15^5}$ е: **А)** $\dfrac{50}{9}$ **Б)** $-\dfrac{100}{9}$ **В)** $\dfrac{100}{9}$ **Г)** $-\dfrac{20}{27}$

Отговор: Б. Пресмятаме:

$$\frac{(-6)^3.10^7}{2^8.15^5} = -\frac{2^3.3^3.2^7.5^7}{2^8.3^5.5^5} = -\frac{2^2.5^2}{3^2} = -\frac{100}{9}$$

2. Кое от числата е решение на уравнението $(x+2)^2 - (x+3)(x-3) = 7$?

А) 3 **Б)** $\dfrac{7}{9}$ **В)** $-\dfrac{3}{4}$ **Г)** $-\dfrac{3}{2}$

Отговор: Г. Уравнението е еквивалентно на $x^2 + 4x + 4 - x^2 + 9 = 7$, откъдето $4x = -6$. Следователно $x = -\dfrac{3}{2}$.

3. Търговец купил 100 килограма ябълки на цена от 3,5 лева за килограм. След като продал половината ябълки на цена от 4,4 лева за килограм, той намалил цената с 5% и продал останалите ябълки на новата намалена цена. Колко лева е била печалбата на търговеца?

А) 60 **Б)** 66 **В)** 73 **Г)** 79

Отговор: Г. Продадени са 50 килограма на цена от 4,4 лева и 50 килограма на цена от $95\%.4,4 = 4,18$ лева. Търговецът спечелил $50(4,4 + 4,18) = 429$ лева и печалбата е $429 - 100.3,5 = 79$ лева.

4. Върху отсечката AD са избрани точки B и C, като B е между A и C. Дължината на BC е 8 cm, а разстоянието между средите на AB и CD е 15 cm. Колко сантиметра е дължината на отсечката AD? **А)** 18 **Б)** 20 **В)** 22 **Г)** 24

Отговор: В. Ако средата на AB е точка X, а средата на CD е точка Y, то

$$XB + CY = XY - BC = 15 - 8 = 7 \text{ cm}.$$

Тогава $AB + CD = 2(XB + CY) = 14$ cm и следователно

$$AD = AB + BC + CD = 14 + 8 = 22 \text{ cm}.$$

5. Катер тръгнал от град A, движил се по течението на реката 3 часа и стигнал до град B. След това тръгнал от град B и се движил 3 часа срещу течението на реката, като стигнал до град C. Колко километра в час е скоростта на реката, ако разстоянието между градовете A и C е 24 километра?

А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6

Отговор: Б. Ако скоростта на катера е v, а на реката е x, то $3(v + x) - 3(v - x) = 24$. Следователно $6x = 24$, т.е. $x = 4$ км/ч.

6. Всяка от три тръби може да напълни басейн съответно за 5, 6 и 10 часа. Времето, за което една тръба може да изпразни басейна е равно на времето, за което тръбата може да напълни басейна. Ако първите две тръби пълнят басейна, а третата го изпразва, за колко време ще се напълни празен басейн?

А) 255 минути **Б)** 240 минути
В) 225 минути **Г)** 250 минути

Отговор: В. За един час тръбите пълнят $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{4}{15}$ части от басейна. Следователно за напълване на басейна са необходими $\dfrac{15}{4}=3\dfrac{3}{4}$ часа. В минути това е 225 минути.

7. Във всяка клетка на таблица с три реда и четири стълба е записано по едно число. Сборът на числата във всеки от трите реда е равен на a, а сбора на числата във всеки от четирите стълба е равен на b. Да се намери сбора на всички числа от таблицата, ако $a-b=8$.

А) 84 **Б)** 108 **В)** 100 **Г)** 96

Отговор: Г. Тъй като $3a=4b$, то $3(b+8)=4b$, откъдето $b=24$. Сборът е $4b=4.24=96$.

8. Разликата в цената на два автомобила е 2000 лева. Ако цената на по-евтиния автомобил се увеличи с 10%, а цената на по-скъпия се намали 15%, двата автомобила ще струват еднакво. Колко лева е била цената на по-евтиния автомобил преди увеличението на цената му?

А) 6800 **Б)** 5100 **В)** 3400 **Г)** 1700

Отговор: А. Ако търсената цена е x, то $1,1.x=0,85(x+2000)$, откъдето получаваме $x=6800$.

9. Броят на делителите на числото $216.243.10^7$, които са точни квадрати, но не са точни кубове е равен на:

А) 120 **Б)** 118 **В)** 115 **Г)** 112

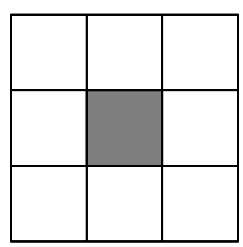
Отговор: Г. Пресмятаме $216.243.10^7=2^3.3^3.3^5.2^7.5^7=2^{10}.3^8.5^7$. Един делител на това число е точен квадрат, ако е от вида $2^2.3^b.5^c$, където a, b и c са четни числа. Тъй като a може да бъде $0,2,4,6,8$ или 10, b може да бъде $0,2,4,6$ или 8 и c може да бъде $0,2,4$ или 6, то общо имаме $6.5.4=120$ числа. Числата, които са точни квадрати и точни кубове, са точни шести степени. В тези числа a, b и c са 0 или 6, т.е. броят на точните шести степени сред делителите е $2.2.2=8$. Търсеният брой е $120-8=112$.

10. Цената на една стока била увеличена два пъти – първия път с 20%, а втория път с $\dfrac{1}{3}$. С колко процента трябва да се намали получената след второто увеличение цена, за да се получи първоначалната цена на стоката?

А) 30 **Б)** 33,2 **В)** 37,5 **Г)** 40

Отговор: В. Ако първоначалната цена е x след първото увеличение тя е $1,2x$, а след второто цената е $1,2x+\frac{1}{3}.1,2x=1,6x$. Търсим процента на намаление y, за който $\dfrac{y}{100}.1,6x=0,6x$. От тук намираме $y=37,5$.

11. Централната клетка на таблица 3×3 е оцветена в черно, а останалите са бели. За един ход може да изберем произволен ред или стълб на таблицата и да преоцветим всички клетки в него (ако една клетка е черна, тя става бяла, а ако една клетка е бяла, тя става черна). След 3 хода в таблицата имало a черни клетки. Колко различни стойности може да приема числото a?



Отговор: 4. В началото има само една оцветена клетка. След всеки ход четността на броя на оцветените клетки се променя. Това означава, че след първия ход този брой ще бъде четно число, след втория – нечетно и след третия – четно. Лесно се вижда, че не могат да се получат 0 оцветени клетки и как могат да се получат 2, 4, 6 или 8 оцветени клетки.

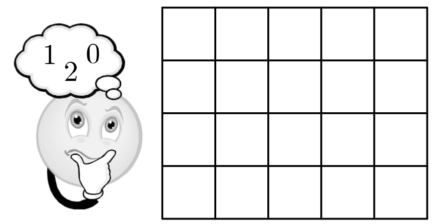
12. Колко двойки от естествени числа (x, y) удовлетворяват равенството $x^2 - y^2 = 143$?

Отговор: 2. От $(x - y)(x + y) = 143 = 11.13$ следва, че $x - y = 1, x + y = 143$ или $x - y = 11, x + y = 13$. От тук получаваме две решения: $x = 72, y = 71$ и $x = 12, y = 1$.

13. Точките X, Y и Z от страните AB, BC и CA на триъгълник ABC са такива, че XY е успоредна на AC, а XZ е успоредна на BC. Ако лицето на триъгълник ABC е 15 cm^2, а лицето на триъгълник ABY е 10 cm^2, колко е лицето на триъгълник ABZ?

Отговор: 5 cm^2. От XY успоредна на AC следва, че $S_{ABY} = S_{BXC}$ и аналогично $S_{ABZ} = S_{AXC}$. Тогава $S_{ABY} + S_{ABZ} = S_{BXC} + S_{AXC} = S_{ABC}$. Следователно $S_{ABZ} = 15 - 10 = 5$ cm^2.

14. Емо иска да запише във всяко поле на таблица с 4 реда и 5 стълба едно от числата 0, 1 и 2 така, че сборът от числата във всеки ред се дели на 3 и сборът на числата във всеки стълб да се дели на 3. Най-много колко единици може да запише Емо в таблицата?



Отговор: 14. Сборът на числата във всеки стълб се дели на 3, значи във всеки стълб има най-много 3 единици; т.е. единиците в таблицата са най-много 15. Ако единиците са 15, във всеки стълб трябва да има три единици е една нула; т.е. в таблицата няма двойки. Тогава сборът от числата в един ред е най-много 5 и тъй като се дели на 3, този сбор е най-много 3. За сбора на числата в таблицата получаваме $4.3 < 15$, противоречие. Пример с 14 единици е показан на чертежа.

0	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	2
1	1	1	1	2

15. В турнир по футбол участвали 4 отбора, като всеки два отбора изиграли по една среща. В крайното класиране сборът от точките на първите два отбора е четири пъти по-голям от сбора на точките на другите два отбора. Колко от срещите са завършили наравно?
(Във футбола за победа са дават 3 точки, за равен резултат по една точка на двата отбора и за загуба – 0 точки.)

Отговор: 3. Общо в турнира са изиграни $\dfrac{4.3}{2} = 6$ мача. Следователно точките на всички отбори са най-малко 12 и най-много 18. Ако последните два отбора имат общо x точки, то първите два отбора имат $4x$ точки, т.е. общо точките са $5x$. Единственото число между 12 и 18, което се дели на 5, е 15. Оттук получаваме, че равните срещи са 3. Такъв турнир може да се реализира (например ако А-Б, Б-В, В-Г завършат наравно, а в останалите мачове победят отборите с по-предни букви).

Задачите от тази тема са предложени от Емил Колев.