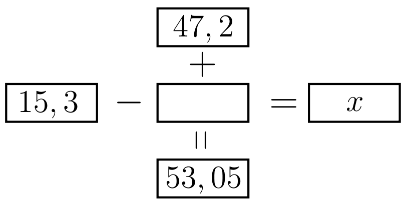
Математически турнир „Иван Салабашев“, 2017 г.
Решения на задачите от темата за 6. клас

1. Сборът $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{4}{1}$ е записан като несъкратима дроб $\frac{p}{q}$. Сборът $p+q$ е равен на:

А) 77 **Б)** 81 **В)** 85 **Г)** 89

Отговор: Г. Пресмятаме: $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{4}{1}=\frac{1.3+2.4+3.6+4.12}{12}=\frac{77}{12}$.

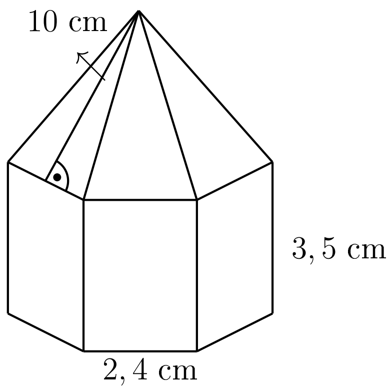
2. Числото x от дадената схема е равно на: **А)** $9,55$ **Б)** $9,45$ **В)** $10,55$ **Г)** $10,45$



Отговор: Б.

3. Върху горната стена на правилна призма е построена правилна пирамида както е показано на чертежа. Лицето на околната повърхнина на призмата е $42\ \text{cm}^2$. По данните от чертежа намерете околната повърхнина на пирамидата в квадратни сантиметри.

А) 45 **Б)** 60 **В)** 75 **Г)** 90



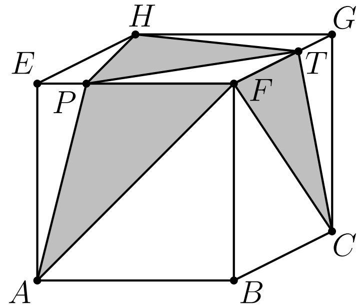
Отговор: Б. От $2,4.3,5.n=42$ получаваме $n=5$. Тогава $S=\frac{10.2,4.5}{2}=60\ \text{cm}^2$.

4. Радиусът на основата на цилиндър е равен на височината на цилиндъра. Околната повърхнина на цилиндъра е 18π. Обемът на цилиндъра е равен на:

А) 27π **Б)** 24π **В)** 15π **Г)** 9π

Отговор: А.

5. Кубът $ABCDEFGH$ на чертежа има ръб с дължина 6 cm.



Ако лицето на $\triangle APF$ е равно на 15 cm^2 и лицето на $\triangle CFT$ е 12 cm^2, колко квадратни сантиметра е лицето на триъгълника HPT?

А) 18 **Б)** 17 **В)** 16,5 **Г)** 16

Отговор: Б.

6. Правоъгълник има дължина 16 cm и широчина 4 cm. Ако увеличим широчината му с 25% от дължината и намалим дължината му с 50% от първоначалната широчина, с колко процента ще се увеличи лицето му? **А)** 25 **Б)** 40 **В)** 50 **Г)** 75

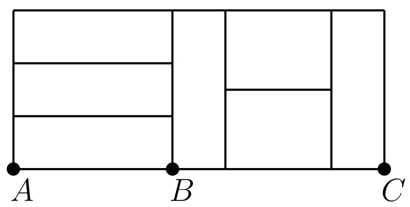
Отговор: Г. Лицето на дадения правоъгълник е $16.4 = 64$ cm^2. След промяната широчината става $4 + 25\%16 = 8$ cm, а дължината става $16 - 50\%4 = 14$ cm. Лицето на получения правоъгълник е $8.14 = 112$ cm^2 и увеличението на лицето е $112 - 64 = 48$ cm^2. Тъй като 48 е 75% от 64, то увеличението е 75%.

7. Естествено число n се нарича *прекрасно*, ако най-големият общ делител на числата n и 100 е равен на 10 и най-малкото общо кратно на числата n и 84 е равно на 1260. Колко са прекрасните числа? **А)** 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

Отговор: В. Тъй като $1260 = 2^2.3^2.5.7$, то $n = 2^x.3^y.5^z.7^t$ където $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 1$ и $0 \leq t \leq 1$. Ако $x = 0$, то НОД$(n, 100)$ ще бъде нечетно числа, което не е вярно. Ако $x = 2$, то НОД$(n, 100)$ ще се дели на 4, което не е вярно. Следователно $x = 1$.
Ако $y < 2$, то НОК$(n, 84)$ няма да се дели на 9 и следователно $y = 2$. Ако $z = 0$, то НОД$(n, 100)$ няма да се дели на 5, което не е вярно. Следователно $z = 1$. Тъй като t може да е 0 или 1, то съществуват две такива числа.

8. Правоъгълник е разделен на 7 правоъгълника с равни лица както е показано на чертежа. Ако $AB = 6$ cm, на колко е равна дължината на отсечката BC?

А) 6 cm **Б)** 7 cm **В)** 8 cm **Г)** 9 cm



Отговор: В. Четириъгълникът с долна страна AB се състои от 3 правоъгълника, а четириъгълника с долна страна BC се състои от 4 правоъгълника. Следователно лицата им се отнасят както 3 : 4. Тъй като те имат една обща страна, то $AB : BC = 3 : 4$, т.е. $BC = 8$ cm.

9. Едно трицифрено число се нарича *чудесно*, ако сборът от цифрите му е 24 и числото се дели на 37. Колко са чудесните числа?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Отговор: А. Директно се проверява, че търсеното число е 888.

10. Колко естествени числа се делят на 6 и имат 15 делители (включително 1 и самото число)?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Отговор: Б. Нека n е едно такова число. Тъй като то се дели на 6, имаме $n = 2^x.3^y.m$, където $x \geq 1$, $y \geq 1$ и m и 6 са взаимно прости. Ако $m \neq 1$ броят на делителите на n ще се дели на поне три числа, по-големи от 1 и по-малки от 15. От $15 = 3.5$ получаваме противоречие. Следователно $m = 1$ и $(x+1)(y+1) = 15$ с две решения $x = 2, y = 4$ и $x = 4, y = 2$.

11. Сборът от цифрите на трицифрено число a е равен на 20, а сборът от цифрите на двуцифрено число b е равен на 10. Сборът от цифрите на числото $a + b$ е равен на 3. На колко е равна цифрата на стотиците на числото a?

Отговор: 9. Да означим със $S(n)$ сбора от цифрите на числото n. Тогава $S(a + b) = S(a) + S(b) - 9t$, където t е броят на преносите при събирането $a + b$. Следователно $3 = 20 + 10 - 9t$, $t = 3$, т.е. имаме три преноса. Тъй като a е трицифрено, а b е двуцифрено, трябва да имаме пренос при събирането и при трите разряда. Това е възможно само ако цифрата на стотиците на a е 9.

12. Да се намери броят на двуцифрените естествени числа n, които се делят на цифрата на единиците си и частното от това деление е едноцифрено число.

Отговор: 8. Ако числото е $\overline{ab} = 10a+b$ и частното е цифрата c, то $10a+b = c.b$ или $10a = (c-1)b$. Очевидно $c \geq 2$. При $c = 2, 4, 8$ получаваме, че b се дели на 10, което е невъзможно. При $c = 3, 5, 7, 9$ получаваме, че b се дели на 5, т.е. $b = 5$. Получаваме съответно числата $15, 25, 35, 45$. При $c = 6$ получаваме, че b се дели на 2, т.е. $b = 2, 4, 6, 8$. Получаваме съответно числата $12, 24, 36, 48$.

13. В турнир по шах за победа се дават 4 точки, за равен резултат по 2 точки и за загуба 1 точка. В турнира участвали 7 състезатели, като всеки двама изиграли по една партия по между си. Сборът от точките на всички състезатели е равен на 88. Колко най-много точки може да има класирания на първо място?

Отговор: 20. Всички изиграни срещи са 21. Всяка победа дава общо 5 точки, а всеки равен резултат дава общо 4 точки. Следователно броят на победите е $88 - 4.21 = 4$. Всеки е изиграл по 6 партии и първенецът може да има най-много $4.4 + 2.2 = 20$ точки.

14. В някои от клетките на таблица с три реда и 6 колони са записани единици, а в останалите клетки – нули. Броят на единиците във всеки ред и всяка колона е даден на схемата. По колко различни начина може да се попълни таблицата?

						5
						3
						2
0	2	2	2	2	2	

Отговор: 10.

15. Във всяко от осемте квадратчета на схемата трябва да се запише по една буква **А** или **Б** така, че да няма съседни букви **А**.

По колко различни начина може да се направи това?

Отговор: 55. Нека a_n е броят на редиците от букви **а** и **б** с дължина n, в които не се срещат две съседни букви **а**. Като разгледаме последната буква в една редица с дължина n, лесно се вижда, че $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. От $a_1 = 2$ и $a_2 = 3$ пресмятаме $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $a_5 = 13$, $a_6 = 21$, $a_7 = 34$ и $a_8 = 55$.