Математически турнир „Иван Салабашев“, 2017 г.

Решения на задачите от темата за 10–12 клас

Задача 1. Точка B лежи на едното рамо на остър ъгъл с връх точка A, а точка C се движи върху другото рамо така, че $\triangle ABC$ е остроъгълен. Нека AA_1 и CC_1 са височини в $\triangle ABC$ ($A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$). Да се докаже, че правата A_1C_1 минава през постоянна точка.

Решение. Нека $H = AA_1 \cap CC_1$, $B_1 = AC \cap BH$, а D е втората пресечна точка на окръжността с диаметър AB и правата A_1C_1. Тогава $\sphericalangle BDB_1 = \sphericalangle BAC$. От друга страна, точките A_1 и C_1 лежат на окръжността с диаметър BH и значи $\sphericalangle BB_1D = \sphericalangle BA_1C_1 = 90^\circ - \sphericalangle B_1BA = \sphericalangle BAC$. Следователно $\sphericalangle BDB_1 = \sphericalangle BB_1D$, т.е. D е симетричната точка на B_1 спрямо AB.

Оценяване. По 2 т. за $\sphericalangle BDB_1 = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle BB_1D = \sphericalangle BA_1C_1$ и $\sphericalangle BA_1C_1 = \sphericalangle BAC$, и 1 т. за довършване на решението.

Задача 2. Да се намерят всички естествени числа a и b, за които числото $a^4 + a^2b^2 + b^4$ има само един прост делител.

Решение. Понеже $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$, то $a^2 - ab + b^2 = p^m$ и $a^2 + ab + b^2 = p^n$, където p е просто число, а $0 \le m < n \in \mathbb{Z}$. От друга страна, $3(a^2 - ab + b^2) \ge (a^2 + ab + b^2)$. Следователно $m = n - 1$, $p = 3$ и $a = b = 3^k$, където $0 \le k \in \mathbb{Z}$, или $m = n - 1$, $p = 2$ и $a^2 + b^2 = 3ab$, което е невъзможно.

Оценяване. 2 т. за разлагането, 1 т. за p^m и p^n, 2 т. за $m = n - 1$, $p \le 3$, 1 т. за $p = 3$ и 1 т. за $p = 2$.

Задача 3. а) Да се докаже, че ако $x, y, z > 0$ и $xyz = 1$, то

$$\frac{x}{1 + x + xy} + \frac{y}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx} = 1.$$

б) Да се намерят всички реални числа $t > 0$, за които неравенството

$$\frac{x}{t + x + xy} + \frac{y}{t + y + yz} + \frac{z}{t + z + zx} \le \frac{1}{t}$$

е изпълнено за произволни реални числа $x, y, z > 0$.

Решение. а) След полагането $x = b/a$, $y = c/b$, $z = a/c$, $s = a + b + c$ достигаме до очевидното равенство $b/s + c/s + a/s = 1$.
б) При $x = y = z = 1$ получаваме необходимото условие $t \le 1$.
То е и достатъчно. Наистина, при $t \le 1$ имаме, че

$$\frac{tx}{t + x + xy} \le \frac{x}{1 + x + xy}.$$

Като съберем това неравенство с другите две подобни, остава да проверим даденото неравенство при $t = 1$.
Първи начин [от който следва а)]. След привеждане под общ знаменател имаме да докажем, че

$$0 \le A = (1 + x + xy)(1 + y + yz)(1 + z + zx) - x(1 + y + yz)(1 + z + zx)$$

$$-y(1+z+zx)(1+x+xy)-z(1+x+xy)(1+y+yz).$$

След разкриване на скобите и съкращаване получаваме, че $A=(xyz-1)^2$.

Втори начин [който се свежда до а)]. Разглеждайки лявата част на неравенството при $t=1$ като функция $f(x)$, намираме, че

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x+xy)^2}-\frac{z^2}{(1+z+zx)^2}=$$

$$\frac{1-xyz}{(1+x+xy)(1+z+zx)}\left(\frac{1}{1+x+xy}+\frac{z}{1+z+zx}\right).$$

Значи $\max f=f(1/yz)=1$, като последното следва от а).

Оценяване. 7 т. за пълно решение, от които 2 т. за а) и 2 т. за свеждане на б) до случая $t=1$.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.