

Секция “Изток” – СМБ
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 10.12.2016 г.

10 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. “Друг отговор” се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име.....училище.....град.....

1. $\frac{2017^2 - 2016^2}{2016^2 - 2015^2} =$

A) $\frac{4033}{4031}$

B) $\frac{4031}{4029}$

B) $\frac{4035}{4033}$

Г) $\frac{4033}{4029}$

2. Средната възраст на Ани, Боби, Ваня и Галя е 17 години. На колко години е всяка от близначките Ваня и Галя, ако Ани е на 13, а Боби е на 19 години?

A) 15

B) 16

B) 17

Г) 18

3. Колко цели числа са решения на неравенството $\frac{2x - 1}{x - 2} \leq 1$?

A) безбройно много

B) 2

B) 3

Г) 4

4. Параболата с уравнение $y = f(x)$ има връх в точката (1;0) и минава през точката (2;2). На колко е равно $f(3)$?

A) 3

B) 4

B) 6

Г) друг отговор

5. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 20x + 16 = 0$, то кое уравнение има корени $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$?

A) $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{16} = 0$

B) $x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{20} = 0$

B) $x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{16} = 0$

Г) $x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{1}{20} = 0$

6. За $\triangle ABC$ е дадено $AB = 6$, при това височината BH е такава, че $\sphericalangle ABH = 60^\circ$ и $\sphericalangle CBH = 45^\circ$. На колко е равна дължината на страната BC ?

A) $3\sqrt{3}$

B) $3\sqrt{2}$

B) $3\sqrt{6}$

Г) друг отговор

7. Вписаният четириъгълник $ABCD$ е такъв, че $AD = 2$, $BC = 5$ и лъчите AD^{\rightarrow} и BC^{\rightarrow} се пресичат в точката F , като $CF = 3$. На колко е равна дължината на DF ?

A) 3

B) 4

B) 5

Г) 6

8. Коя функция има графика, симетрична на графиката на функцията $y = 2x^2 - 3x + 1$ относно началото на координатната система? (Всички функции са с дефиниционна област $x \in (-\infty; +\infty)$.)

A) $y = -2x^2 - 3x - 1$

B) $y = -2x^2 - 3x + 1$

B) $y = -2x^2 + 3x - 1$

Г) $y = 2x^2 - 3x - 1$

9. Медианите към катетите на правоъгълен триъгълник са с дължини $\sqrt{61}$ и $\sqrt{109}$. На колко е равна дължината на медианата към хипотенузата?

A) $\sqrt{37}$

B) $\sqrt{65}$

B) $\sqrt{71}$

Г) друг отговор

10. Нека $f(x) = x^2 + \sqrt{20}x + 7$. Определете множеството от стойностите на реалния параметър m , за които неравенството $f(u) + f(v) > m$ е изпълнено за всеки две реални числа u и v .

ОТГОВОРИ НА ЗАДАЧИ 1-9

1. А 2. Г 3. В 4. Г 8 5. А 6. Б 7. Б 8. А 9. Г $\sqrt{34}$

10. РЕШЕНИЕ.

* Функцията $y = f(x)$ приема най-малка стойност за $x = -\sqrt{5}$ (3 точки);

* най-малката стойност на функцията $y = f(x)$ е $f(-\sqrt{5}) = 2$ (3 точки);

* при $u = v = -\sqrt{5}$ неравенството добива вида $4 > m$ (1 точка);

* за $m \in (-\infty; 4)$ и за произволни реални u и v е изпълнено $f(u) + f(v) \geq f(-\sqrt{5}) + f(-\sqrt{5}) = 4 > m$ (3 точки);

* ако за произволни реални u и v е изпълнено $f(u) + f(v) > m$, то и $f(-\sqrt{5}) + f(-\sqrt{5}) = 4 > m$, следователно $m \in (-\infty; 4)$, т.е. търсеното множество са числата от интервала $(-\infty; 4)$ (3 точки).

Съставител на темата – Борислав Лазаров, СМБ секция „Изток“

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИ 1-9

$$1. \frac{2017^2 - 2016^2}{2016^2 - 2015^2} = \frac{(2017 + 2016)(2017 - 2016)}{(2016 + 2015)(2016 - 2015)}.$$

$$2. B = \Gamma = x, (13 + 19 + x + x) : 4 = 17, x = 18.$$

$$3. \frac{2x - 1}{x - 2} \leq 1 \iff \frac{x + 1}{x - 2} \leq 0, x \in \{-1, 0, 1\}.$$

$$4. y = a(x - 1)^2, 2 = a(2 - 1)^2, a = 2, 2 \cdot (3 - 1)^2 = 8.$$

$$5. \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}, \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{16}.$$

6. $BH = \frac{1}{2}AB = 3$ (катет срещу ъгъл 30°); $BC = \sqrt{2}BH$ (хипотенуза в равнобедрен правоъгълен триъгълник).

$$7. DF = x, ACF \sim BDF, \frac{AF}{CF} = \frac{BF}{DF}, x(2 + x) = 24, x = 4.$$

8. Графиките означаваме с G и G^* ; $(x; y) \in G \iff (-x; -y) \in G^*, -y = 2(-x)^2 - 3(-x) + 1, y = -2x^2 - 3x - 1.$

9. Катетите означаваме с $2x$ и $2y$; $x^2 + 4y^2 = 61, 4x^2 + y^2 = 109, 5(x^2 + y^2) = 170, \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{34}.$