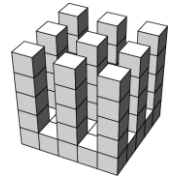


Международно състезание “Европейско Кенгуру”

22 март 2014 г.

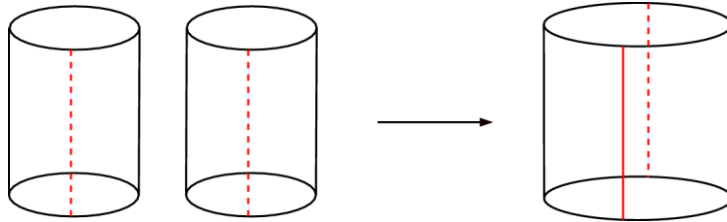
ТЕМА за 11 и 12 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. **ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!**



1. От плътен куб с размери $5 \times 5 \times 5$ са отстранени малки кубчета с размери $1 \times 1 \times 1$, както е показано на фигурата. Колко най-много са липсващите малки кубчета, ако долната стена е непокътната?
 A) 56 B) 60 C) 64 D) 68 E) 80
2. Днес Катя, Емилия и Лилия имат рожден ден. Сумата от годините им е 44. Каква ще бъде сумата от годините им следващия път, когато тя е двуцифрено число с еднакви цифри?
 A) 55 B) 66 C) 77 D) 88 E) 99
3. Ако $a^b = \frac{1}{2}$, то стойността на a^{-3b} е равна на:
 A) $\frac{1}{8}$ B) 8 C) -8 D) 6 E) $\frac{1}{6}$
4. В три кошници с различни размери са поставени 48 топки. Най-малката и най-голямата кошница съдържат общо два пъти повече топки, отколкото средната. Броят на топките в най-малката кошница е половината от броя на топките, намиращи се в средната. Колко топки се съдържат в най-голямата кошница?
 A) 16 B) 20 C) 24 D) 30 E) 32
5. Стойността на израза $\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$ е равна на:
 A) 2^{2011} B) 2^{2012} C) 2^{2013} D) 1 E) 2
6. Кой от следващите изрази не съдържа $b+1$ като делител?
 A) $2b+2$ B) b^2-1 C) b^2+b D) $-1-b$ E) b^2+1
7. Колко цифри съдържа резултатът от умножението $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$?
 A) 22 B) 55 C) 77 D) 110 E) 111
8. Прекрасният Хари има електронен адрес, който е известен само на четирима негови приятели. Днес той получил осем писма на този адрес, между които нямало спам. Кое от следващите твърдения е със сигурност вярно?
 A) Хари е получил по две писма от всеки от приятелите си.
 B) Хари не е получил осем писма от един приятел.
 C) Хари е получил поне по едно писмо от всеки от приятелите си.
 D) Хари е получил поне две писма от един от приятелите си.
 E) Хари е получил поне две писма от двама различни приятели.

9. Двама еднакви цилиндъра на фигурата са разрязани по пунктираните линии и са разгънати. След залепване на развивките по същите линии се образува големият цилиндър.



Какво може да се каже относно обема на големия цилиндър, сравнен с обема на един от малките цилиндри?

- A) Той има два пъти по-голям обем.
- B) Той има три пъти по-голям обем.
- C) Той има π пъти по-голям обем.
- D) Той има четири пъти по-голям обем.
- E) Той има осем пъти по-голям обем.

10. Числото, което задава 2014 г., има свойството, че е съставено от различни цифри, като последната е по-голяма от сумата на останалите три. Колко години са изминали, откакто това се е случило за последен път?

- A) 5
- B) 215
- C) 305
- D) 395
- E) 485

11. Размерите на правоъгълна кутия са $a \times b \times c$, като $a < b < c$. Ако се увеличи някой от размерите с дадено положително число, обемът на кутията също се увеличава. В кой от следващите случаи увеличението на обема на кутията е най-голямо?

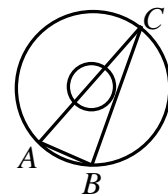
- A) Ако се увеличи a .
- B) Ако се увеличи b .
- C) Ако се увеличи c .
- D) Едновременно в случаите A), B) и C), защото увеличението е едно и също.
- E) Не е възможно да се определи.

12. Във футболен мач победителят получава три точки, загубилият – нула, а в случай на равенство двата отбора получават по една точка. Четири отбора A, B, C и D вземат участие във футболен турнир. Всеки отбор играе по три мача – по един срещу останалите три. В края на турнира отбор A има 7 точки, а отборите B и C имат по 4 точки. Колко точки има отбор D?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

13. Радиусите на две концентрични окръжности се отнасят както 1:3. Нека AC е диаметър на голямата окръжност, BC е хорда на голямата окръжност, допираща се до малката и дължината на хордата AB е 12. Тогава радиусът на голямата окръжност е равен на:

- A) 13
- B) 18
- C) 21
- D) 24
- E) 26



14. Колко целочислени тройки (a, b, c) със свойството $a > b > c > 1$ удовлетворяват неравенството $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) безброй много

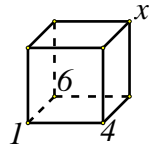
15. Дадени са ненулевите числа a , b , c и естественото число n . Известно е, че числата $(-2)^{2n+3} a^{2n+2} b^{2n-1} c^{3n+2}$ и $(-3)^{2n+2} a^{4n+1} b^{2n+5} c^{3n-4}$ имат един и същ знак. Кое от следващите неравенства със сигурност е вярно?

- A) $a > 0$ B) $b > 0$ C) $c > 0$ D) $a < 0$ E) $b < 0$

16. Шест седмици са $n!$ секунди. Числото n е равно на:

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

17. Върховете на куб са номерирани с числата от 1 до 8 така, че сумата на четирите числа във върховете на всяка стена е една и съща. Числата 1, 4 и 6 са вече поставени във върховете на куба, както е показано на фигурата. Каква е стойността на x ?

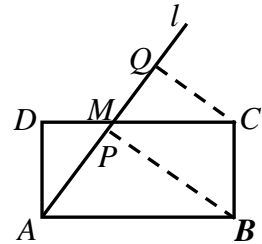


- A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

18. Сиренето съдържа твърдо вещество и вода. Върху етикета на опаковката на един вид сирене има надпис: 24% пълна масленост. Върху същия етикет пише още: 64% суха масленост. Пълната масленост задава съдържанието на мазнините в цялото сирене, а сухата масленост – съдържанието на мазнините в твърдото вещество. Какво е процентното съдържание на водата в това сирене?

- A) 88% B) 62,5% C) 49% D) 42% E) 37,5%

19. Права l минава през върха A на правоъгълник $ABCD$. Разстоянията от точките C и B до l са съответно 2 и 6. Ако AD е два пъти по-малка от AB , да се намери AB .



- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) $4\sqrt{3}$

20. Функцията $f(x) = ax + b$ удовлетворява равенствата $f(f(f(1))) = 29$ и $f(f(f(0))) = 2$. Намерете стойността на a .

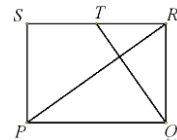
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21. Дадени са десет различни естествени числа. Точно пет от тях се делят на 5 и точно седем от тях се делят на 7. Нека M е най-голямото от числата. Коя е възможно най-малката стойност на M ?

- A) 104 B) 77 C) 75 D) 63 E) нито една от изброените

22. Даден е правоъгълник $PQRS$, за който T е средата на RS и правата QT е перпендикулярна на диагонала PR . На колко е равно отношението $PQ:QR$?

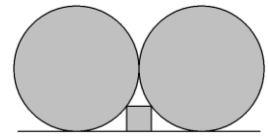
- A) 2:1 B) 3:1 C) 3:2 D) $\sqrt{2}:1$ E) 5:4



23. Девет пионки са червени или сини. Известно е, че ако изберем случайно 3 от тях, вероятността и трите да са червени е $\frac{2}{3}$. Колко от деветте пионки са червени?

- A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8

24. Квадрат се намира между хоризонтална права и две еднакви окръжности с радиус 1, които се допират до правата и помежду си (вж. фигурата вдясно). Намерете дължината на страната на квадрата.



- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

25. Тончо желае да запише няколко различни естествени числа, нито едно от които не надминава 100. Колко най-много числа може да запише Тончо така, че произведението им да не се дели на 54?

- A) 8 B) 17 C) 68 D) 69 E) 90

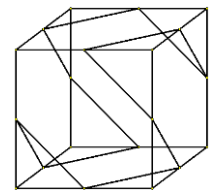
26. Два правилни многоъгълника със страна 1 лежат в противоположни полуравнини спрямо общата им страна AB . Единият от многоъгълниците е 15-ъгълник $ABCD\dots$, а другият е n -ъгълник $ABZY\dots$. Каква стойност трябва да има n , така че разстоянието CZ да е равно на 1?

- A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

27. Равенствата $k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1$ са изпълнени за естествените числа k , m и n . Колко различни стойности може да приеме m ?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) безброй много

28. На чертежа е показана затворена начупена линия, получена при свързването с отсечки на средите на ръбовете на даден куб. Вътрешен ъгъл на начупената линия се дефинира по обичайния начин като ъгъл между две отсечки от линията с общ край (двете отсечки лежат в една равнина). На колко е равна сумата от вътрешните ъгли на начупената линия?



- A) 720° B) 1080° C) 1200° D) 1440° E) 1800°

29. Функцията $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ удовлетворява условията $f(4) = 6$ и $xf(x) = (x-3)f(x+1)$. Намерете стойността на произведението $f(4)f(7)f(10)\dots f(2011)f(2014)$.

- A) 2013 B) 2014 C) 2013.2014 D) 2013! E) 2014!

30. В горите на магически остров живеят три вида животни: лъвовете, вълците и козите. Вълците ядат кози, а лъвовете ядат кози и вълци. На магическия остров се случват следните чудеса: ако вълк изяде коза, той се превръща в лъв; ако лъв изяде коза, той се превръща във вълк; ако лъв изяде вълк, той се превръща в коза. В началото на острова е имало 17 кози, 55 вълка и 6 лъва. Колко най-много животни могат да останат на острова, когато условията за изяждане изчезнат, т.е. когато останат животни само от един вид?

- A) 1 B) 6 C) 17 D) 23 E) 35